

Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitres** : Suites numériques + Limites et continuité des fonctions + Dérivation et accroissements finis
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 9 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : relier suites extraites, valeurs intermédiaires et accroissements finis dans une même preuve
 - Chercher : choisir une fonction auxiliaire ou un intervalle adapté
 - Calculer : majorer une erreur et localiser un point fixe sans calculatrice
 - Communiquer : rédiger une démonstration epsilon complète et citer les théorèmes utilisés

Exercice 1 : Somme alternée et suites extraites (5 points)

Calculatrice interdite.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

- a. Montrez que les suites $(u_{2n})_n \geq 1$ et $(u_{2n+1})_n \geq 0$ sont adjacentes. (2 points)

- b. Soit (v_n) une suite réelle telle que (v_{2n}) et (v_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ . Démontrez, avec la définition ε , que (v_n) converge vers ℓ . Concluez pour (u_n) . (1,5 point)
- c. On note ℓ la limite de (u_n) . Justifiez que $u_{2n} \leq \ell \leq u_{2n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et déduisez-en un encadrement de ℓ par deux fractions en prenant $n = 2$. (1 point)
- d. Montrez que, pour tout $n \geq 1$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}$. (0,5 point)

Exercice 2 : Accroissements finis et valeurs intermédiaires (6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

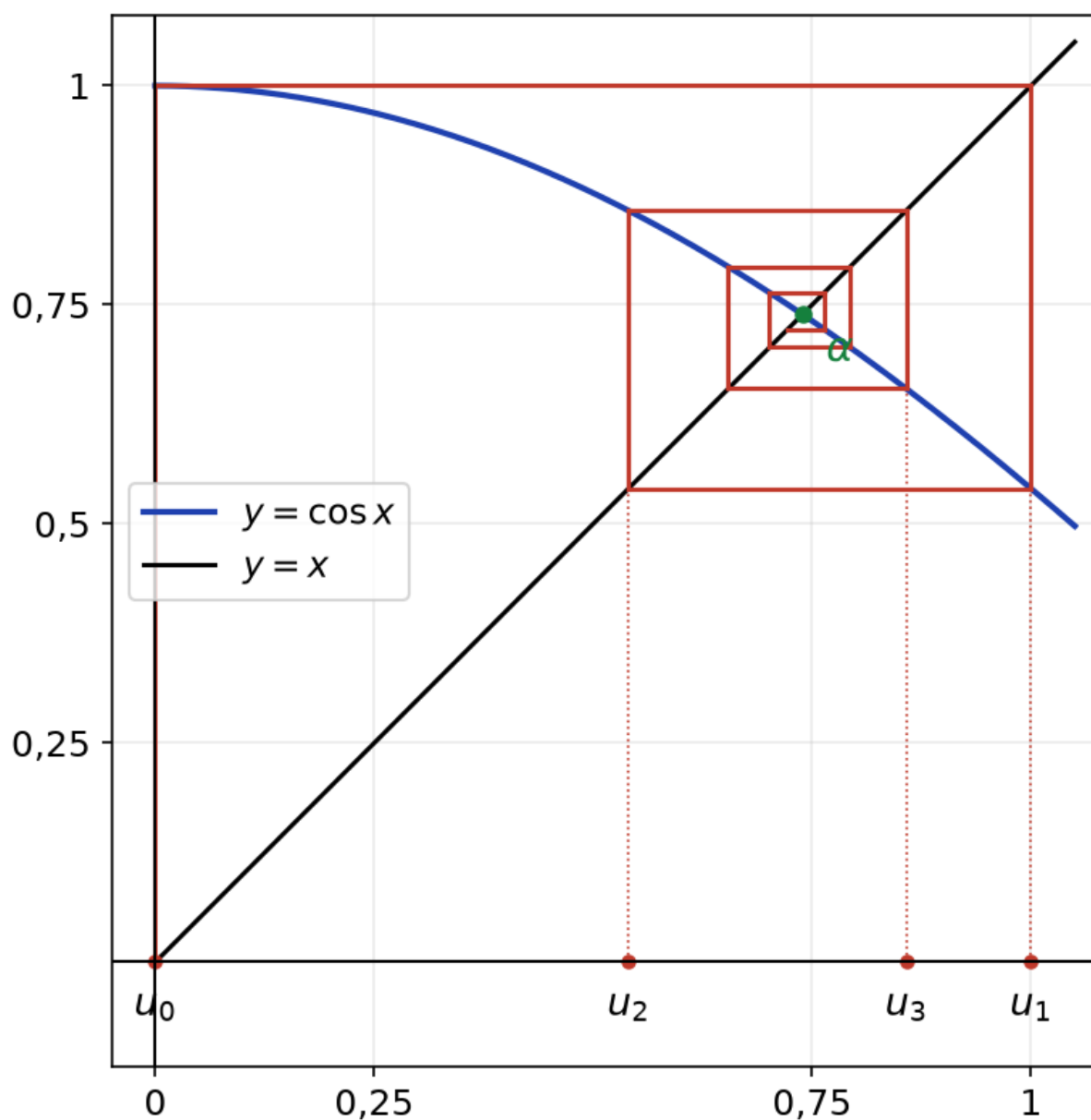
- a. Montrez qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = 1 - c$. (1 point)
- b. Déduisez-en qu'il existe deux réels distincts a et b de $]0,1[$ tels que $f'(a) f'(b) = 1$. (2 points)

Partie B. Soit g une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $g'(x)$ tende vers un réel L quand x tend vers $+\infty$.

- c. Démontrez que $\frac{g(x)}{x}$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$. On pourra, pour $\varepsilon > 0$ fixé, choisir $A > 0$ tel que $|g'(t) - L| \leq \varepsilon$ pour $t \geq A$, puis appliquer l'égalité des accroissements finis sur $[A, x]$. (3 points)

Exercice 3 : Itérations du cosinus et point fixe (9 points)

On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La figure ci-dessous représente les premiers termes pour $u_0 = 0$.



Partie A : existence et localisation du point fixe.

- a. On pose $h(x) = \cos x - x$. Montrez que h s'annule en un unique point α de $[0, 1]$. (1,5

point)

b. Montrez que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. (1 point)

Partie B : convergence par contraction.

c. Montrez que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par la fonction cosinus. En déduire que $u_n \in [0, 1]$ pour tout n . (1 point)

d. Montrez que, pour tous x et y de $[0, 1]$, $|\cos x - \cos y| \leq \sin(1) |x - y|$. (1 point)

e. Montrez que, pour tout n , $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n$, puis que (u_n) converge vers α . (1 point)

Partie C : allure et vitesse de convergence. On suppose désormais $u_0 \neq \alpha$.

f. Montrez que, pour tout n , $u_n \neq \alpha$ et que $u_{n+1} - \alpha$ et $u_n - \alpha$ sont de signes contraires. (1,5 point)

g. Montrez que $\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}$ tend vers $-\sin \alpha$ quand n tend vers $+\infty$. (1,5 point)

h. À l'aide des questions f) et g), expliquez l'allure en spirale de la figure, et rapprochez-la de la situation de l'exercice 1. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : suites, continuité et dérivation

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Suites numériques](#) » en L1 et « [Limites et continuité](#) » en L1 et

« Dérivation » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites numériques](#), [limites et continuité](#), [dérivation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : suites, convergence et suites adjacentes](#)
- [Contrôle de maths L1 : limites de fonctions et continuité](#)
- [Contrôle de maths L1 : dérivation, Rolle et accroissements finis](#)