

Contrôle de maths L1 : réels, borne supérieure et partie entière

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Nombres réels et borne supérieure
- **Durée conseillée** : 1 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer avec des epsilon qu'un réel est une borne supérieure ou inférieure
 - Calculer : encadrer avec la partie entière et résoudre des inéquations avec valeurs absolues
 - Chercher : distinguer borne supérieure et plus grand élément sur des exemples
 - Communiquer : rédiger une preuve de densité fondée sur la propriété d'Archimède

Exercice 1 : Question de cours : borne supérieure et propriété d'Archimède (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

On admet que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

- a. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M un réel. Démontrez que $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a$. (2 points)

- b. Énoncez puis démontrez par l'absurde la propriété d'Archimède : pour tout réel $x > 0$ et tout réel y , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$. (2 points)

Exercice 2 : Valeur absolue et partie entière (5 points)

On note $E(x)$ la partie entière du réel x : c'est l'unique entier vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

- Démontrez que, pour tous réels x et y , $||x| - |y|| \leq |x - y|$. (1 point)
- Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 1| + |x + 2| \leq 5$. (1 point)
- Démontrez que, pour tout réel x , $E(2x) - 2E(x) \in \{0, 1\}$, en précisant pour quels x on obtient 1. (1,5 point)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrez que, pour tout réel x , $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$. (1,5 point)

Exercice 3 : Bornes supérieures et inférieures (6 points)

Pour chaque ensemble, on demande la borne supérieure et la borne inférieure, avec une démonstration utilisant la caractérisation de l'exercice 1, et de dire si elles sont atteintes.

- $A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^* \right\}$. (2,5 points)
- $B = \left\{ \frac{x}{1+x} : x \in]0, +\infty[\right\}$. (2 points)
- Soient C et D deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, et $C + D = \left\{ \begin{matrix} c, d : c \in C, \\ d \in D \end{matrix} \right\}$.
Démontrez que $C + D$ admet une borne supérieure et que $\sup(C + D) = \sup C + \sup D$. (1,5 point)

Exercice 4 : Problème : densité de $\mathbb{Q}$ et des irrationnels (5 points)

Dans ce problème, x et y sont deux réels tels que $x < y$. On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Justifiez l'existence d'un entier $n \geq 1$ tel que $n(y - x) > 1$. En posant $p = E(nx) + 1$, démontrez que $r = \frac{p}{n}$ est un rationnel vérifiant $x < r < y$. (2 points)
- Déduisez-en que l'intervalle $]x, y[$ contient une infinité de rationnels. (1 point)
- Démontrez que $]x, y[$ contient au moins un irrationnel. (1 point)
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Démontrez par l'absurde que $f(t) = t$ pour tout réel t . (1 point)



Réviser avant le contrôle : réels, borne supérieure et partie entière

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Nombres réels](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres réels](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).