

Contrôle de maths L1 : récurrence, sommes et coefficients binomiaux

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Entiers naturels, récurrence et dénombrement
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : rédiger une récurrence simple, double ou forte correctement initialisée
 - Calculer : manipuler le symbole somme, changer d'indice et télescoper
 - Modéliser : dénombrer à l'aide de listes, d'arrangements et de parties
 - Communiquer : justifier une formule de dénombrement par une bijection

Exercice 1 : Question de cours : formule de Pascal et binôme de Newton (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

a. Démontrez la formule de Pascal : pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \quad (1,5 \text{ point})$$

b. Soient a et b deux nombres complexes. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Vous rédigerez avec soin le changement d'indice. (2,5 points)

Exercice 2 : Trois récurrences (5 points)

- a. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (1,5 point)
- b. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrez par une récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_n = 2^n + 1$. (1,5 point)
- c. Démontrez par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier. (2 points)

Exercice 3 : Calculs de sommes (5 points)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

- a. Déterminez deux réels α et β tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, calculez $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. (1 point)
- b. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$. À l'aide du changement d'indice $j = n-k$, montrez que $2S_n = n2^n$, puis donnez S_n . (1,5 point)
- c. Vérifiez que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$. Déduisez-en, pour

$n \geq 2$, la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$. (1,5 point)

- d. En remarquant que $k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$, calculez $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ par télescopage. (1 point)

Exercice 4 : Problème : dénombrer des couples de parties (6 points)

Soit E un ensemble fini à n éléments, avec $n \geq 1$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de p -listes d'éléments de E ? Pour $p \leq n$, combien existe-t-il de p -listes d'éléments deux à deux distincts? Justifiez brièvement. (1 point)
- On note N le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. En classant ces couples selon le cardinal k de B , montrez que $N = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, puis calculez N . (1,5 point)
- Retrouvez la valeur de N en construisant une bijection entre l'ensemble de ces couples et l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1, 2\}$. (1 point)
- Combien existe-t-il de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$? Justifiez par une bijection avec les couples de la question b). (1 point)
- Pour trois parties finies A, B, C , démontrez à partir de la formule $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$ la formule du cardinal de $A \cup B \cup C$. Combien d'entiers de 1 à 300 sont divisibles par 2, par 3 ou par 5? (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : récurrence, sommes et coefficients binomiaux

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Récurrence et dénombrement](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [récurrence et dénombrement](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).