Contrôle de maths L1 : probabilités finies, Bayes et loi binomiale

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L1
- **Chapitre :** Probabilités sur un univers fini
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Modéliser : choisir un univers fini et une probabilité adaptés
  - Calculer : dénombrer des tirages simultanés avec des coefficients binomiaux
  - Raisonner : démontrer et appliquer la formule des probabilités totales et celle de Bayes
  - Chercher : distinguer indépendance deux à deux et indépendance mutuelle
  - Calculer : obtenir espérance et variance par linéarité

Exercice 1 : Question de cours : probabilités totales et formule de Bayes (3 points)

Calculatrice interdite. Les résultats peuvent être laissés sous forme de fractions ou de puissances.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements tel que $P(A_i) > 0$ pour tout i.

a. Démontrez que, pour tout événement B, $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(B)$. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Énoncez et démontrez la formule de Bayes donnant $P_B(A_j)$ lorsque $P(B) > 0$. *(1,5 point)*

Exercice 2 : Tirages simultanés dans une urne (4 points)

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires, indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules. On note Y le nombre de boules rouges obtenues.

a. Décrivez un univers Ω adapté, donnez son cardinal et justifiez le choix de la probabilité uniforme. *(0,5 point)*

b. Calculez la probabilité d'obtenir trois boules rouges, puis exactement une boule rouge, puis au moins une boule rouge. *(2 points)*

c. Déterminez la loi de Y et calculez son espérance. *(1,5 point)*

Exercice 3 : Un test de dépistage (5 points)

Une maladie touche $2\,\%$ d'une population. Un test de dépistage est positif chez $95\,\%$ des personnes malades. Il est aussi positif, à tort, chez $10\,\%$ des personnes saines. On choisit une personne au hasard et on note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

a. Représentez la situation par un arbre pondéré. *(1 point)*

b. Calculez $P(T)$. *(1 point)*

c. Calculez la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit malade. Donnez la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près. Commentez. *(1,5 point)*

d. Un second test, identique, est réalisé. On suppose que, sachant l'état de santé de la personne, les résultats des deux tests sont indépendants. On note T_1 et T_2 les événements « le premier (resp. second) test est positif ». Calculez $P_{T_1 \cap T_2}(M)$, puis une valeur approchée à 0,01

près. *(1,5 point)*

Exercice 4 : Indépendance deux à deux et mutuelle (3 points)

On lance deux fois une pièce équilibrée. On considère les événements A : « le premier lancer donne Pile », B : « le second lancer donne Pile » et C : « les deux lancers donnent le même résultat ».

a. Décrivez l'univers et les trois événements, puis montrez que A, B et C sont deux à deux indépendants. *(1,5 point)*

b. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ? Justifiez. *(1,5 point)*

Exercice 5 : Problème : répondre au hasard à un QCM (5 points)

Un QCM comporte 10 questions. Chaque question propose 4 réponses, dont une seule est juste. Un étudiant qui n'a pas révisé répond au hasard à chaque question, indépendamment des autres. On note X le nombre de bonnes réponses.

a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres. Donnez $P(X = k)$ pour $k \in \begin{Bmatrix} 0, \\ fs4..., 10 \end{Bmatrix}$, puis $P(X \geq 1)$. *(1 point)*

b. En écrivant X comme une somme de variables de Bernoulli, démontrez que $E(X) = \frac{5}{2}$ et que $V(X) = \frac{15}{8}$. *(1,5 point)*

c. Une bonne réponse rapporte 3 points et une mauvaise en retire 1. On note S la note obtenue. Exprimez S en fonction de X, puis calculez $E(S)$ et $V(S)$. Le barème est-il dissuasif ? *(1 point)*

d. Pour $k \in \{0,. . ., 9\}$, calculez le quotient $\frac{P(X = k+1)}{P(X = k)}$. Déduisez-en la valeur de k pour

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

laquelle $P(X = k)$ est maximale. *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : probabilités finies, Bayes et loi binomiale

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Probabilités finies » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** probabilités finies.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.