

Contrôle de maths L1 : polynômes, racines et fractions rationnelles

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Polynômes et fractions rationnelles
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : caractériser l'ordre de multiplicité d'une racine par les dérivées successives
 - Calculer : effectuer une division euclidienne de polynômes
 - Calculer : exploiter les relations entre coefficients et racines
 - Représenter : factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
 - Calculer : décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

Exercice 1 : Question de cours : racines multiples et dérivées (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, P est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

- Énoncez la formule de Taylor pour le polynôme P au point a . (1 point)
- Démontrez que a est racine de P d'ordre de multiplicité au moins 2 si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$. (2 points)

Exercice 2 : Division euclidienne et ordre de multiplicité (4 points)

- a. Effectuez la division euclidienne de $A = X^4 + 2X^3 - X + 3$ par $B = X^2 + X + 1$. (1,5 point)
- b. On considère $P = X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 14X^2 + 12X - 8$. Montrez que 2 est racine de P et déterminez son ordre de multiplicité à l'aide des dérivées successives. Factorisez ensuite P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$. (2,5 points)

Exercice 3 : Relations entre coefficients et racines (3 points)

On note x_1, x_2, x_3 les trois racines complexes, comptées avec multiplicité, du polynôme $Q = X^3 - 2X^2 + 3X - 5$.

- a. Donnez $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ et $x_1 x_2 x_3$, puis calculez $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Que peut-on en déduire sur les racines de Q ? (1,5 point)
- b. Calculez $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. (0,75 point)
- c. Calculez $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. (0,75 point)

Exercice 4 : Factorisation de $X^4 + 1$ (3 points)

- a. Déterminez les racines complexes de $X^4 + 1$ sous forme exponentielle, puis factorisez ce polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. (1,5 point)
- b. En regroupant les racines conjuguées, factorisez $X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles

de $\mathbb{R}[X]$. Vérifiez le résultat en développant. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : restes et éléments simples (7 points)

Partie A. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- a. Justifiez que le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ s'écrit $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, puis déterminez a et b . (2 points)

Partie B. On considère les fractions rationnelles

$$F = \frac{X^2 + 1}{(X-1)^2 (X+1)} \text{ et } G = \frac{1}{X (X^2 + 1)}.$$

- b. Justifiez l'absence de partie entière, puis décomposez F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. (2,5 points)
- c. Décomposez G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. (1 point)
- d. Décomposez G en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : polynômes, racines et fractions rationnelles

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Polynômes](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [polynômes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : polynômes, arithmétique et nombres complexes](#)