

Contrôle de maths L1 : polynômes, arithmétique et nombres complexes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitres** : Nombres complexes et trigonométrie + Arithmétique des entiers + Polynômes et fractions rationnelles
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer les propriétés des racines n -ièmes de l'unité
 - Calculer : factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$
 - Calculer : mener l'algorithme d'Euclide pour des polynômes et pour des entiers
 - Raisonner : relier arithmétique et polynômes par le critère des racines rationnelles
 - Chercher : exploiter les nombres complexes pour résoudre une équation du troisième degré

Exercice 1 : Question de cours : racines n -ièmes de l'unité (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

- a. Démontrez que $U_n = \left\{ e^{2ik\pi/n} \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$ et que ces n nombres sont deux à deux distincts. (1,5 point)

b. Démontrez que, pour $n \geq 2$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle. (1,5 point)

Exercice 2 : Factorisation de $X^6 - 1$ (4 points)

- Factorisez $X^6 - 1$ en produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}[X]$. (1 point)
- En regroupant les racines conjuguées, factorisez $X^6 - 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. (1,5 point)
- En déduire, sans développer, la factorisation de $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis vérifiez-la. (1,5 point)

Exercice 3 : Algorithme d'Euclide pour les polynômes et les entiers (5 points)

On considère $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

- À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminez le pgcd unitaire D de A et B . Présentez chaque division euclidienne. (2,5 points)
- Montrez que, pour tout entier n , l'entier $n + 1$ divise $\text{pgcd}(A(n), B(n))$. (1 point)
- Pour $n = 10$, on a $A(10) = 9999$ et $B(10) = 1221$. Calculez $\text{pgcd}(9999, 1221)$ par l'algorithme d'Euclide. (1 point)
- Comparez ce pgcd avec $D(10)$. Que peut-on en conclure ? (0,5 point)

Exercice 4 : Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers (4 points)

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients entiers, avec $a_0 \neq 0$.

- On suppose que P admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Démontrez que p divise a_0 et que q divise a_n . (2 points)
- Déterminez toutes les racines rationnelles de $2X^3 - 3X^2 - 3X + 2$, puis factorisez ce polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$. (1,5 point)
- Montrez que $X^3 - 3X - 1$ n'a aucune racine rationnelle. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : une équation du troisième degré et $\cos(\pi/9)$ (4 points)

On note $Q = X^3 - 3X - 1$.

- Soit θ un réel et $z = e^{i\theta}$. On pose $x = z + \frac{1}{z}$. Montrez que $x = 2\cos\theta$ et que $x^3 - 3x = z^3 + \frac{1}{z^3} = 2\cos(3\theta)$. (1 point)
- En déduire que les trois racines de Q sont $2\cos\frac{\pi}{9}$, $2\cos\frac{5\pi}{9}$ et $2\cos\frac{7\pi}{9}$. (1,5 point)
- Démontrez que $\cos\frac{\pi}{9}$ est irrationnel. (1 point)
- Calculez $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : polynômes, arithmétique et nombres complexes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Nombres complexes](#) » en L1 et « [Arithmétique dans \$\mathbb{Z}\$](#) » en L1 et « [Polynômes](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres complexes](#), [arithmétique dans \$\mathbb{Z}\$](#) , [polynômes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : complexes, racines n-ièmes et trigonométrie](#)
- [Contrôle de maths L1 : arithmétique, Bézout, Gauss et congruences](#)
- [Contrôle de maths L1 : polynômes, racines et fractions rationnelles](#)