

Contrôle de maths L1 : matrices, rang, trace et changement de base

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Matrice d'une application linéaire et changement de base
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Représenter : écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases données
 - Calculer : obtenir une matrice de passage, son inverse et appliquer la formule de changement de base
 - Chercher : discuter le rang d'une matrice selon un paramètre par la méthode du pivot
 - Raisonner : utiliser la trace et le rang comme invariants de similitude

Exercice 1 : Question de cours : changement de base et trace (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Définissez la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Énoncez ensuite la formule reliant les matrices A et A' d'un endomorphisme u de E dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$. (1 point)
- Démontrez que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. (1 point)

- c. Déduisez-en que deux matrices semblables ont la même trace. Montrez aussi qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$. (1 point)

Exercice 2 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ (5 points)

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et on définit φ sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X - 1)P'$.

- Montrez que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. (0,5 point)
- Déterminez la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. (1 point)
- On pose $\mathcal{B}' = (1, X - 1, (X - 1)^2)$, dont on admet que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Écrivez la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculez P^{-1} en exprimant les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$. (1,5 point)
- Calculez directement la matrice A' de φ dans $\mathcal{B}'$, puis vérifiez par le calcul que $A' = P^{-1}AP$. (1,5 point)
- Donnez le rang et la trace de A . Déduisez-en la dimension du noyau de φ , puis déterminez ce noyau. (0,5 point)

Exercice 3 : Rang d'une matrice à paramètre (4 points)

Pour tout réel α , on pose

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

-    l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, transformez M_α en une matrice triangulaire

supérieure. Factorisez le dernier coefficient diagonal obtenu. (2 points)

b. Déduisez-en le rang de M_α selon les valeurs de α . (1,5 point)

c. Pour $\alpha = -2$, donnez une relation linéaire non triviale entre les colonnes de M_{-2} . (0,5 point)

Exercice 4 : Matrices semblables ou non (3 points)

On rappelle que A et B sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1} A P$.

a. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? (1 point)

b. Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont la même trace et le même rang. Sont-elles semblables ? (1 point)

c. Montrez que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables, en exhibant une matrice P convenable. (1 point)

Exercice 5 : Problème : matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ (5 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{C}$, on considère le plan $F = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ et la droite $G = \text{Vect}(w)$, avec $w = (1, 1, 1)$.

a. Montrez que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. (1 point)

b. On note P la projection sur F parallèlement à G . Calculez $p(x, y, z)$, puis écrivez la matrice A de P dans $\mathcal{C}$. (1,5 point)

c. On pose $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (0, 1, -1)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, w)$. Justifiez que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donnez la matrice D de P dans $\mathcal{B}'$. (1 point)

- d. Déduisez-en le rang et la trace de A , puis vérifiez la trace sur l'expression de A . (0,5 point)
- e. En notant Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}'$, montrez sans calculer A^2 que $A^2 = A$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : matrices, rang, trace et changement de base

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Matrices et changement de base](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [matrices et changement de base](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).