

## Contrôle de maths L1 : logique, quantificateurs et ensembles

### Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Logique, raisonnement et ensembles
- **Durée conseillée** : 1 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
  - Raisonner : choisir entre raisonnement direct, par contraposition, par l'absurde ou par analyse-synthèse
  - Communiquer : traduire un énoncé en langage formel et nier une phrase à plusieurs quantificateurs
  - Calculer : manipuler unions, intersections, complémentaires et fonctions indicatrices
  - Chercher : construire un contre-exemple ou un témoin pour une phrase existentielle

### Exercice 1 : Question de cours : De Morgan et irrationalité de racine de 2 (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit  $E$  un ensemble et  $A$ ,  $B$  deux parties de  $E$ . On note  $\overline{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

- a. Énoncez les deux lois de De Morgan pour les parties  $A$  et  $B$ , puis démontrez l'égalité  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  par double inclusion. (2 points)

- b. Démontrez par l'absurde que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. Vous pourrez utiliser sans démonstration le fait que, pour un entier  $n$ , si  $n^2$  est pair alors  $n$  est pair. (2 points)

### Exercice 2 : Quantificateurs et négations (5 points)

Dans tout l'exercice,  $f$  désigne une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel. Les phrases demandées doivent être écrites avec des quantificateurs, sans utiliser le symbole de négation devant une phrase quantifiée.

- a. Écrivez la phrase «  $f$  est majorée » avec des quantificateurs, puis sa négation. (1 point)
- b. On rappelle que  $f$  est continue en  $a$  lorsque

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \\ & , \exists \eta > 0, \\ & , \forall x \in \mathbb{R}, \\ & , (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

Écrivez la négation de cette phrase, puis démontrez que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $g(x) = 0$  si  $x < 0$  n'est pas continue en  $0$ . (1,5 point)

- c. Écrivez avec des quantificateurs la phrase «  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  », puis sa négation. (1 point)
- d. On considère les deux phrases

$$\begin{aligned} &P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \\ &,\exists y \in \mathbb{R}, \\ &,y > x^2 \quad P_2 : \exists y \in \mathbb{R}, \\ &,\forall x \in \mathbb{R}, \\ &,y > x^2. \end{aligned}$$

Dites si chacune est vraie ou fausse et justifiez. (1,5 point)

### Exercice 3 : Implication, contraposée et réciproque (4 points)

$P$  et  $Q$  désignent deux assertions.

- Dressez la table de vérité de  $P \Rightarrow Q$  et de  $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ . Que peut-on en conclure ? (1 point)
- Pour un entier  $n$ , on considère l'implication « si  $n^2$  est pair, alors  $n$  est pair ». Écrivez sa contraposée et sa réciproque. Ensuite, démontrez l'implication par contraposition et dites si la réciproque est vraie. (1,5 point)
- Soit  $x$  un réel. Démontrez par contraposition que : si pour tout  $\varepsilon > 0$  on a  $|x| \leq \varepsilon$ , alors  $x = 0$ . (1,5 point)

### Exercice 4 : Problème : analyse-synthèse et fonctions indicatrices (7 points)

**Partie A : fonctions paires et impaires.** On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On veut démontrer que toute fonction  $f \in \mathcal{F}$  s'écrit de manière unique  $f = g + h$  avec  $g$  paire et  $h$  impaire.

- Analyse : on suppose qu'une telle écriture existe. Exprimez  $g(x)$  et  $h(x)$  en fonction de  $f(x)$  et  $f(-x)$ . Qu'en déduisez-vous sur l'unicité ? (2 points)
- Synthèse : démontrez que les fonctions trouvées conviennent. (1,5 point)
- Donnez la décomposition de la fonction exponentielle. (0,5 point)

**Partie B : fonctions indicatrices.** Soit  $E$  un ensemble. Pour une partie  $A$  de  $E$ , la fonction indicatrice  $1_A : E \rightarrow \{0,1\}$  vaut 1 sur  $A$  et 0 ailleurs. On admet que deux parties  $A$  et  $B$

sont égales si et seulement si  $1_A = 1_B$ .

d. Démontrez que  $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$  et que  $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$ . (1 point)

e. Déduisez-en, à l'aide d'une loi de De Morgan, que  $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$ . (1 point)

f. On appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$  l'ensemble  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .  
Démontrez que  $1_{A \Delta B} = (1_A - 1_B)^2$ , puis que  $A \Delta B = \emptyset$  si et seulement si  $A = B$ . (1 point)



## **Réviser avant le contrôle : logique, quantificateurs et ensembles**

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Logique et ensembles » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [logique et ensembles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).