

Contrôle de maths L1 : limites de fonctions et continuité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Limites et continuité des fonctions
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4,5 points ; exercice 4 : 6,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer une limite par epsilon-delta et une absence de limite par la caractérisation séquentielle
 - Calculer : prolonger une fonction par continuité et étudier une fonction définie par morceaux
 - Chercher : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction auxiliaire bien choisie
 - Communiquer : énoncer et démontrer un théorème du cours

Exercice 1 : Théorème des valeurs intermédiaires (4 points)

Calculatrice interdite.

Cette question de cours porte sur les fonctions continues sur un segment.

- a. Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue sur un segment $[a, b]$.
(1 point)

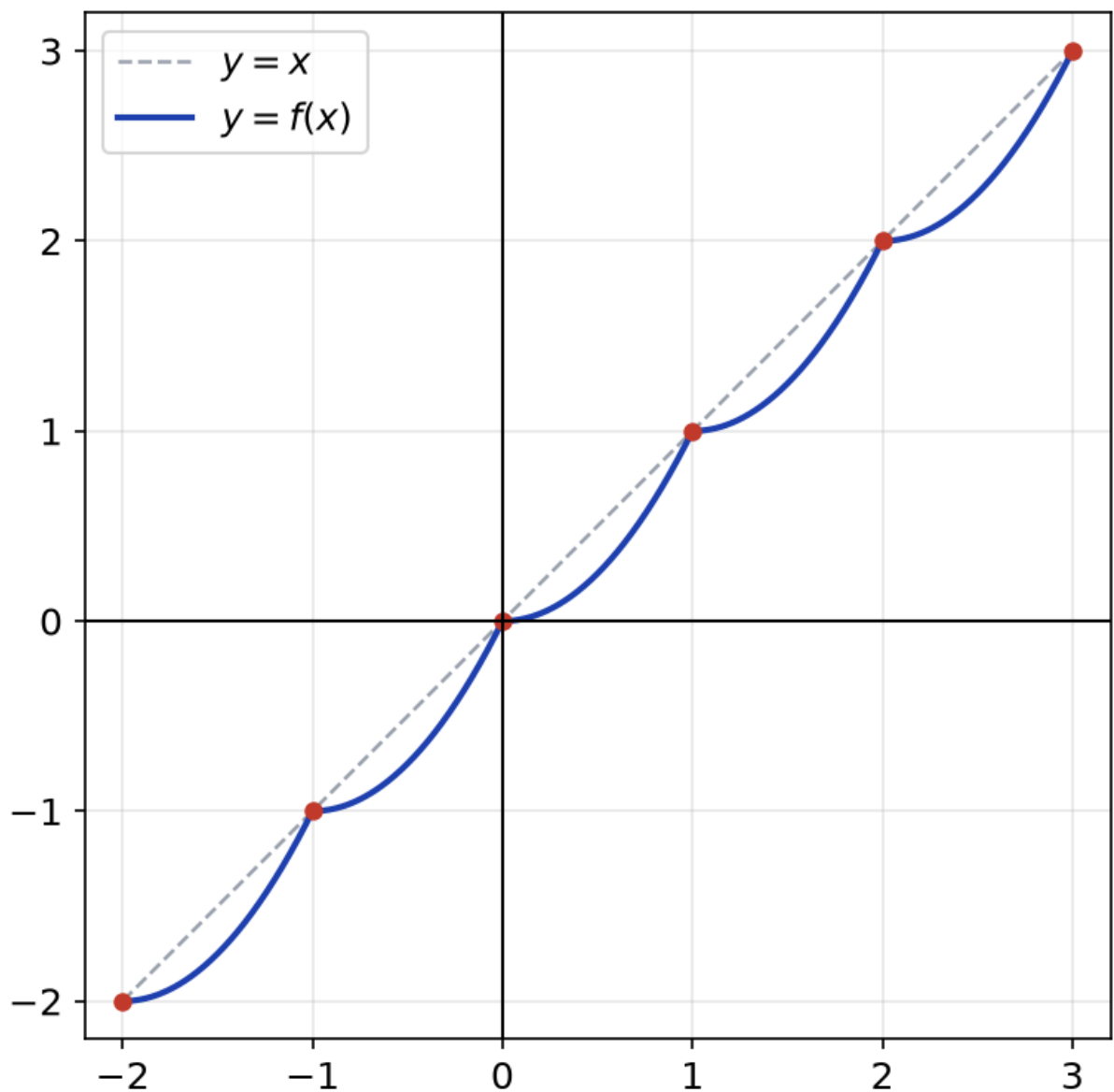
- b. Démontrez-le. Vous traiterez d'abord le cas $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ en considérant la borne supérieure c de l'ensemble $E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$, puis vous en déduirez le cas général. (3 points)

Exercice 2 : Limites, epsilon-delta et suites (5 points)

- a. Démontrez, à l'aide de la définition avec ε et δ , que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. (1,5 point)
- b. Démontrez que la fonction $x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, n'admet pas de limite en 0 . (1,5 point)
- c. On pose $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$. Montrez que g est prolongeable par continuité en 0 et précisez la valeur du prolongement. (1 point)
- d. On définit h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $h(x) = 0$ sinon. Montrez que h est continue en 0 et en aucun autre point. (1 point)

Exercice 3 : Une fonction définie avec la partie entière (4,5 points)

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x et on définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. La courbe de f est tracée ci-dessous sur $[-2, 3]$.



- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Exprimez $f(x)$ sans partie entière pour $x \in [n, n+1[$ et justifiez que f est continue sur $]n, n+1[$. (0,5 point)
- Étudiez les limites à gauche et à droite de f en un entier n . Concluez que f est continue sur $\mathbb{R}$. (1,5 point)
- On pose $\varphi(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ pour $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Montrez que φ se prolonge par continuité en 0 et donnez la valeur du prolongement. (1,5 point)
- Montrez que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis, en citant un théorème du cours, qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 4 : Points fixes, extremums et cordes horizontales (6,5 points)

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A : point fixe.

- a. Soit $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrez qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$. (1,5 point)

Partie B : minimum atteint.

- b. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrez que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. (2 points)

Partie C : cordes horizontales. Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

- c. En étudiant $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, montrez qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$. (1,5 point)

- d. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrez de même qu'il existe $c \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que

$f\left(c + \frac{1}{n}\right) = f(c)$. On pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right)$ où $g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : limites de fonctions et continuité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Limites et continuité](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [limites et continuité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation](#)