

Contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitres** : Intégrale de Riemann et calcul de primitives + Équations différentielles linéaires + Formules de Taylor et développements limités
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 6 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : obtenir un développement limité par intégration et par produit
 - Calculer : intégrer par parties et appliquer la variation de la constante
 - Raisonner : dériver une fonction définie par une intégrale à bornes variables
 - Chercher : encadrer une suite d'intégrales et en déduire un équivalent
 - Communiquer : enchaîner plusieurs outils d'analyse dans un problème rédigé

Exercice 1 : Une fonction définie par une intégrale (6 points)

Calculatrice interdite.

Pour tout réel x , on pose

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

- Justifiez que F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculez ensuite $F'(x)$. (1,5 point)
- Démontrez que F est impaire. (1 point)
- Déterminez le développement limité de F à l'ordre 5 en 0. (1,5 point)
- Déduisez-en l'équation de la tangente à la courbe de F en 0, ainsi que la position locale de la courbe par rapport à cette tangente. (1 point)
- Montrez que, pour tout $x > 0$, $0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$. Déduisez-en la limite de F en $+\infty$. (1 point)

Exercice 2 : Équation différentielle et intégration par parties (6 points)

On considère sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : x y' - y = x^2 \ln x.$$

- Résolvez l'équation homogène associée à (E) sur I . (1 point)
- À l'aide d'une intégration par parties, calculez $\int_1^x \ln t \, dt$ pour $x > 0$. (1 point)
- Par la méthode de variation de la constante, déterminez toutes les solutions de (E) sur I . (1,5 point)
- Déterminez l'unique solution g de (E) sur I telle que $g(1) = 0$. (0,5 point)
- Déterminez le développement limité de g à l'ordre 3 en 1. Que peut-on en déduire pour g au voisinage de 1 ? (2 points)

Exercice 3 : Problème : une suite d'intégrales issue d'une équation différentielle (8 points)

Pour tout entier naturel n , on considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_n) : y' + y = x^n.$$

Partie A : l'équation différentielle

- a. Montrez que (E_n) admet une unique solution y_n sur $\mathbb{R}$ telle que $y_n(0) = 0$, et que pour tout réel x :

$$y_n(x) = e^{-x} \int_0^x t^n e^t dt.$$

(1,5 point)

- b. Dans le cas $n = 1$, calculez $y_1(x)$ explicitement à l'aide d'une intégration par parties. Vérifiez votre résultat. (1 point)
- c. Montrez que $y_n(x) \sim \frac{x^{n+1}}{n+1}$ quand x tend vers 0. (1 point)

Partie B : la suite des valeurs en 1

Pour tout entier naturel n , on pose $J_n = y_n(1)$.

- d. Montrez que $J_n = \int_0^1 t^n e^{t-1} dt$, puis que $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déduisez-en la limite de la suite (J_n) . (1 point)

e. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que pour tout entier naturel n :

$$(n+1) J_n + J_{n+1} = 1. \text{ (1 point)}$$

f. Déduisez-en que $J_n \sim \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. (1 point)

g. Montrez enfin que $J_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : intégrales, équations différentielles et DL

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégration sur un segment](#) » en L1 et « [Équations différentielles](#) » en L1 et « [Développements limités](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégration sur un segment](#), [équations différentielles](#), [développements limités](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : intégrale de Riemann, primitives et IPP](#)
- [Contrôle de maths L1 : équations différentielles d'ordre 1 et 2](#)
- [Contrôle de maths L1 : formules de Taylor et développements limités](#)