

Contrôle de maths L1 : intégrale de Riemann, primitives et IPP

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Intégrale de Riemann et calcul de primitives
- **Durée conseillée** : 2 heures 30 minutes
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle
 - Modéliser : reconnaître une somme de Riemann pour calculer une limite
 - Calculer : intégrer par parties et par changement de variable
 - Calculer : obtenir une primitive d'une fraction rationnelle simple
 - Chercher : étudier la suite des intégrales de Wallis par une relation de récurrence

Exercice 1 : Question de cours : positivité et inégalité de la moyenne (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, $a < b$ sont deux réels et f est une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

a. Énoncez l'inégalité de la moyenne pour f sur $[a, b]$. (1 point)

b. On suppose $f \geq 0$ sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x) dx = 0$. Démontrez que f est la fonction nulle

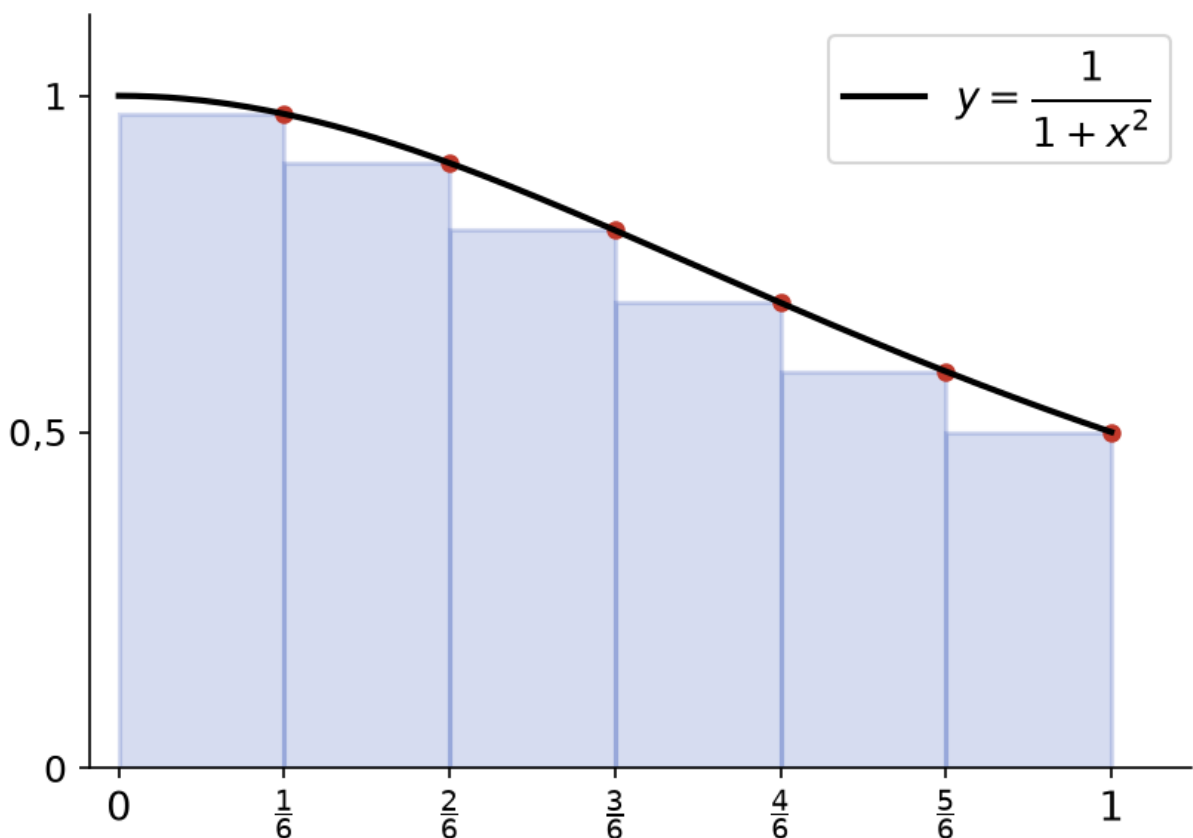
sur $[a, b]$. (2 points)

Exercice 2 : Sommes de Riemann (4 points)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \text{ et } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k}.$$

La figure représente la fonction $f: x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ et, pour $n = 6$, les rectangles de base $\left[\frac{k-1}{6}, \frac{k}{6}\right]$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{6}\right)$.



- a. Montrez que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et déterminez la limite de (S_n) . (1,5 point)
- b. En utilisant la monotonie de f , démontrez l'encadrement $S_n \leq \frac{\pi}{4} \leq S_n + \frac{1}{2n}$. (1 point)
- c. Déterminez la limite de (u_n) . (1,5 point)

Exercice 3 : Intégration par parties et changement de variable (5 points)

Calculez les intégrales suivantes en justifiant la méthode employée.

a. $I = \int_0^1 x e^x dx$ (1 point)

b. $J = \int_1^e x \ln x dx$ (1,5 point)

c. $K = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$, à l'aide du changement de variable $x = t^2$. (1,5 point)

d. $L = \int_0^1 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx$, après avoir décomposé la fraction rationnelle en éléments simples. (1 point)

Exercice 4 : Problème : les intégrales de Wallis (8 points)

Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

- Calculez W_0 et W_1 . (0,5 point)
- Montrez que $W_n > 0$ pour tout n et que la suite (W_n) est décroissante. (1 point)
- À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. (2 points)
- Démontrez par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$. (1,5 point)
- Montrez que la suite de terme général $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constante et donnez sa valeur. (1,5 point)
- Démontrez que $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ tend vers 1, puis que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : intégrale de Riemann, primitives et IPP

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégration sur un segment](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégration sur un segment](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL](#)