

Contrôle de maths L1 : géométrie du plan et de l'espace, distances

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Géométrie du plan et de l'espace
- **Durée conseillée** : 1 heure 30 minutes
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer les formules de distance à un plan et à une droite
 - Représenter : passer d'une équation cartésienne à un paramétrage
 - Calculer : utiliser le produit vectoriel et le produit mixte
 - Modéliser : voir l'intersection de deux plans comme un système linéaire
 - Chercher : étudier la position d'une droite et d'une sphère

Exercice 1 : Question de cours : distances à un plan et à une droite (3 points)

Calculatrice interdite.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- a. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point. Démontrez que la distance de M_0 à $\mathcal{P}$ vaut

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(2 points)

- b. Soit Δ la droite passant par A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$. Démontrez que, pour tout point M ,

$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}. \quad (1 \text{ point})$$

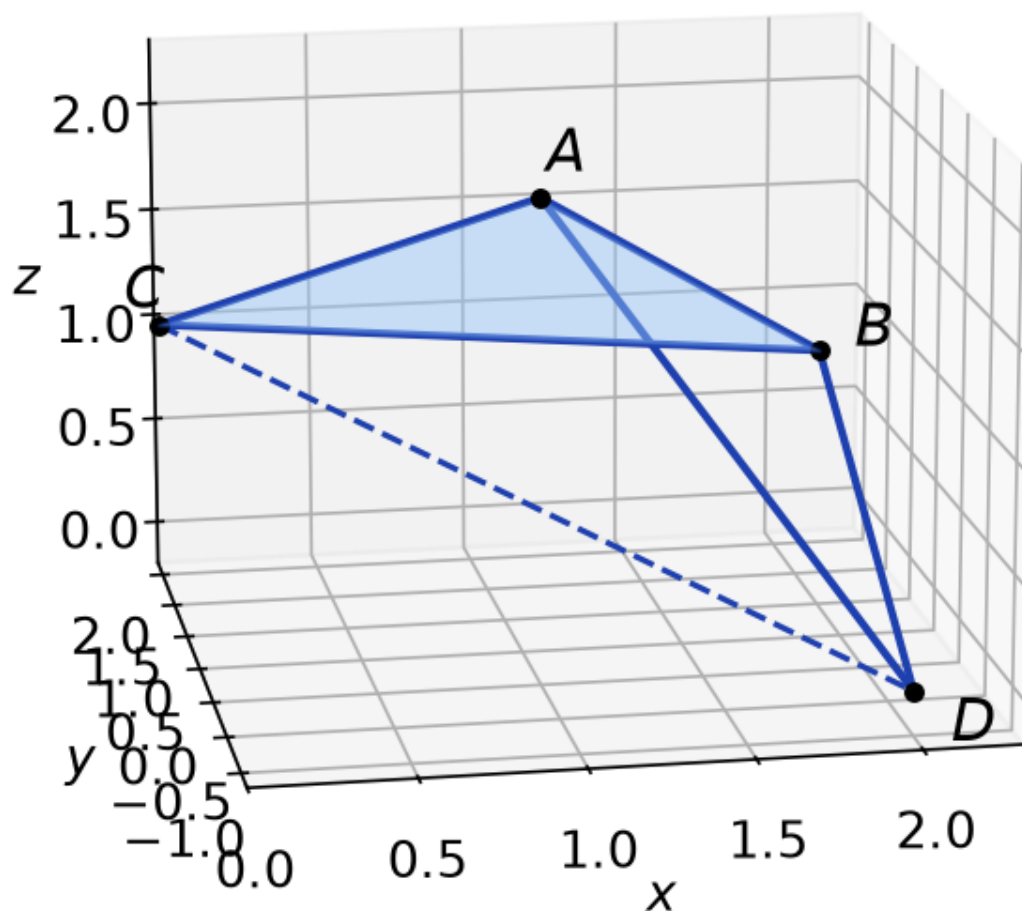
Exercice 2 : Un plan, une droite d'intersection et une distance (5 points)

On considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(0, 2, 1)$ et $D(2, -1, 0)$.

- Montrez que A , B et C ne sont pas alignés. Donnez une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P} = (ABC)$. (1 point)
- Calculez $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Déduisez-en une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. (1,5 point)
- Soit $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $x + y - z = -1$. Montrez que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants en une droite Δ . En résolvant un système linéaire, donnez une représentation paramétrique de Δ . Vérifiez que sa direction est celle de $\vec{n}_{\mathcal{P}} \wedge \vec{n}_{\mathcal{Q}}$. (1,5 point)
- Calculez la distance du point D au plan $\mathcal{P}$. (1 point)

Exercice 3 : Produit mixte et volume d'un tétraèdre (4 points)

On reprend les points A , B , C et D de l'exercice 2. On rappelle que le volume d'un tétraèdre $ABCD$ vaut $\frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}|$.



(La figure n'est pas à l'échelle.)

- Calculez le produit mixte $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$. (1,5 point)
- Déduisez-en le volume du tétraèdre $ABCD$. (0,5 point)
- Calculez l'aire du triangle ABC . (1 point)
- À l'aide de la formule $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de base} \times \text{hauteur}$, retrouvez le résultat de la question d de l'exercice 2. (1 point)

Exercice 4 : Problème : distance à une droite et sphère tangente (8 points)

On considère la droite $\mathcal{L}$ passant par $E(1, 1, 0)$ et dirigée par $\vec{w} = (1, 2, 2)$, le point $M(4, 1, 3)$ et le point $O(1, 2, 3)$. Le plan $\mathcal{P}$ est celui de l'exercice 2.

Partie A : distance d'un point à une droite

- À l'aide du produit vectoriel, calculez la distance de M à $\mathcal{L}$. (1,5 point)
- Déterminez le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{L}$, puis vérifiez que MH est égale à la distance trouvée. (1,5 point)

Partie B : une sphère tangente au plan

- Déterminez une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre O tangente au plan $\mathcal{P}$. (1,5 point)
- Déterminez les coordonnées du point de contact T entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$. (1,5 point)
- La droite $\mathcal{L}$ coupe-t-elle la sphère $\mathcal{S}$? Justifiez sans calculer les éventuels points d'intersection. (2 points)



Réviser avant le contrôle : géométrie du plan et de l'espace, distances

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Géométrie du plan et de l'espace](#) » en L1 puis entraînez-vous

avec les **exercices corrigés** [géométrie du plan et de l'espace](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).