

Contrôle de maths L1 : formules de Taylor et développements limités

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Formules de Taylor et développements limités
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer et démontrer l'unicité d'un développement limité
 - Calculer : obtenir un développement limité par produit, composition et quotient
 - Raisonner : majorer une erreur d'approximation avec l'inégalité de Taylor-Lagrange
 - Chercher : lever une forme indéterminée à l'aide d'un développement limité ou d'un équivalent
 - Représenter : interpréter un développement asymptotique en termes de tangente et d'asymptote

Exercice 1 : Question de cours : unicité du développement limité (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 , et $n \in \mathbb{N}$.

- Donnez la définition de « f admet un développement limité à l'ordre n en 0 ». (1 point)
- Démontrez que, s'il existe, ce développement limité est unique : autrement dit, si

$\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0, alors $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. (2 points)

Exercice 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange pour le sinus (4 points)

- a. Énoncez l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I , entre deux points a et x de I . (1 point)
- b. Montrez que, pour tout réel x ,

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{120}.$$

(1,5 point)

- c. Déduisez-en une valeur approchée de $\sin(0,1)$ sous forme décimale, et justifiez que l'erreur commise est inférieure à 10^{-7} . (1,5 point)

Exercice 3 : Développements limités, limites et équivalents (5 points)

Les développements limités usuels en 0 de e^x , $\sin x$, $\cos x$ et $\ln(1+x)$ sont supposés connus.

- a. Déterminez le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \rightarrow e^x \sin x$. (1,5 point)
- b. Déterminez le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \rightarrow \ln(\cos x)$. (1,5 point)
- c. Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x - \sin x}$. (1 point)
- d. Donnez un équivalent simple, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, de $(1+x)^{1/x} - e$. (1 point)

Exercice 4 : Position d'une courbe par rapport à sa tangente (3 points)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos x$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- Déterminez le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f . (1,5 point)
- Donnez une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. (0,5 point)
- Étudiez la position relative de $\mathcal{C}$ et de T au voisinage de 0. Que représente le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 ? (1 point)

Exercice 5 : Problème : asymptote oblique d'une fonction (5 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x e^{1/x}$, et on note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- En posant $u = \frac{1}{x}$ et en utilisant le développement limité de e^u à l'ordre 3 en 0, montrez que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$,

$$g(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(1,5 point)

- Déduisez-en que Γ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et en $-\infty$, dont vous donnerez une équation. Précisez la position de Γ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$, puis de $-\infty$. (1,5 point)
- Déterminez les limites de g en 0 à droite et en 0 à gauche. (1 point)
- Calculez $g'(x)$, dressez le tableau de variations de g et vérifiez qu'il est compatible avec la question b. (1 point)



Réviser avant le contrôle : formules de Taylor et développements limités

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Développements limités » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [développements limités](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL](#)