

Contrôle de maths L1 : fonctions réciproques, arctan et hyperboliques

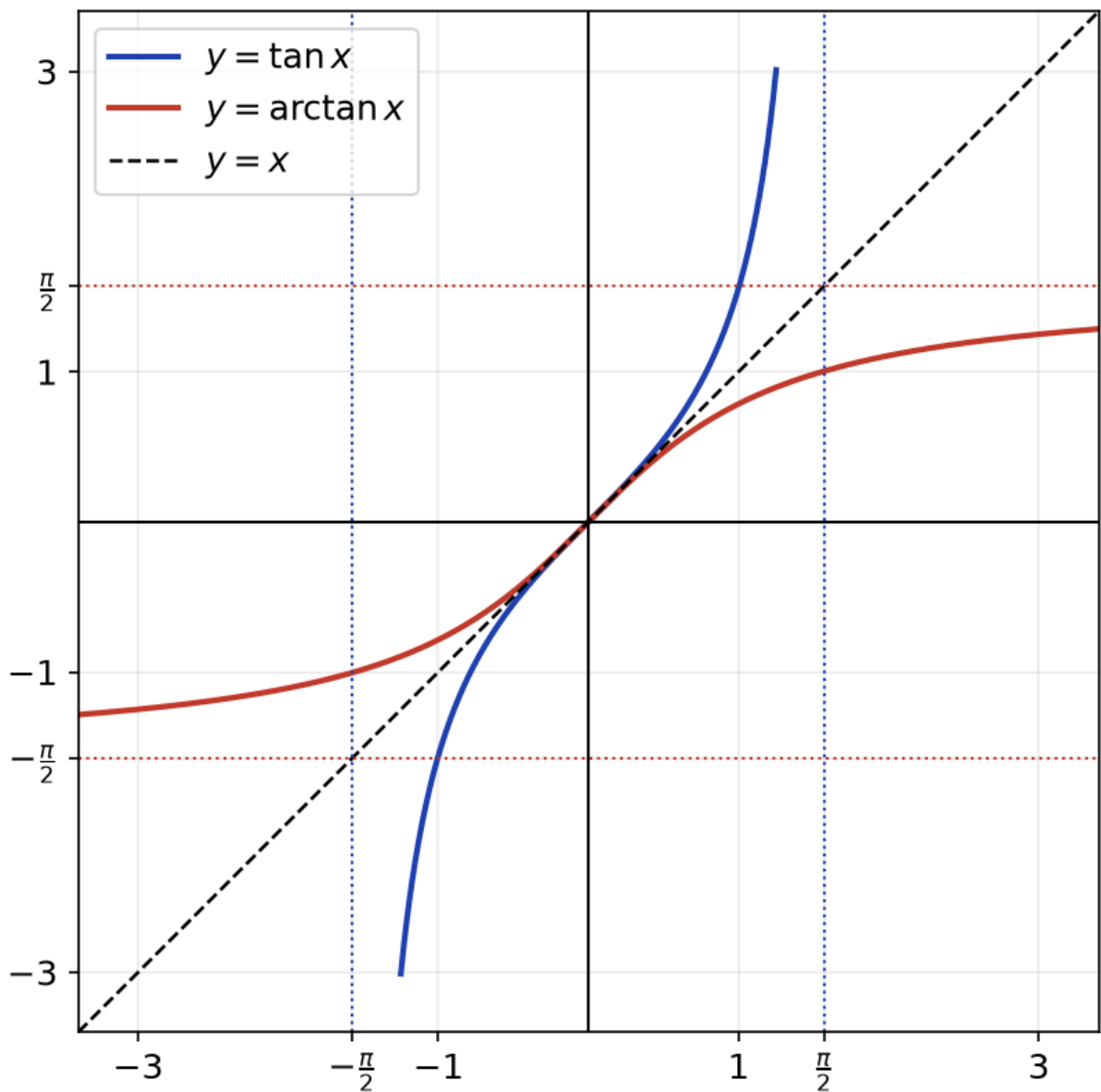
Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Fonctions usuelles et fonctions réciproques
- **Durée conseillée** : 1 heure 30 minutes
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Communiquer : énoncer le théorème de la bijection et démontrer la dérivée d'une réciproque
 - Calculer : simplifier des expressions avec arctan et arcsin
 - Raisonner : résoudre des équations avec les fonctions hyperboliques et trouver une réciproque explicite
 - Représenter : étudier et tracer une fonction composée avec arctan

Exercice 1 : Dérivées des fonctions réciproques (4 points)

Calculatrice interdite.

La figure ci-dessous représente la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction arctangente. Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



- a. Énoncez le théorème de la bijection pour une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle, ainsi que le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque. (1 point)
- b. Justifiez que $\tan$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, puis démontrez que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. (1,5 point)
- c. Démontrez que $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (1,5 point)

Exercice 2 : Identités et simplifications circulaires (5 points)

- a. Démontrez que, pour tout réel $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, et donnez la valeur de cette somme pour $x < 0$. (2 points)
- b. Simplifiez $\arcsin(\sin x)$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. (1,5 point)
- c. Calculez $\arcsin(\sin 10)$. On admet que $3,14 < \pi < 3,15$. (1,5 point)

Exercice 3 : Fonctions hyperboliques (5 points)

On rappelle que $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

- a. Démontrez que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ pour tout réel x , puis que $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. (1,5 point)
- b. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch} x = 2$. (1,5 point)
- c. Montrez que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En résolvant l'équation $\operatorname{sh} y = x$, montrez que sa réciproque est $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (2 points)

Exercice 4 : Étude d'une fonction composée avec arctan (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

- a. Justifiez que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et montrez que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. (2 points)

- b. Déduisez-en une expression simple de $f(x)$ sur $] -1, +\infty[$, puis sur $] -\infty, -1[$. Expliquez pourquoi les constantes diffèrent. (1,5 point)
- c. Déterminez les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche et à droite en -1 . Donnez le sens de variation de f et ses asymptotes. (1,5 point)
- d. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -1 ? Tracez l'allure de sa courbe. (1 point)



Réviser avant le contrôle : fonctions réciproques, arctan et hyperboliques

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Fonctions usuelles](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions usuelles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).