

Contrôle de maths L1 : familles libres, bases et dimension

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Familles libres, bases et dimension
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le lemme d'échange par récurrence et en déduire l'invariance de la dimension
 - Calculer : établir la liberté d'une famille et trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base
 - Chercher : extraire ou compléter une base et déterminer le rang d'une famille
 - Modéliser : utiliser la formule de Grassmann et les polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 1 : Question de cours : lemme d'échange et dimension (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, E est un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Énoncez le lemme d'échange (ou lemme de Steinitz) : si E est engendré par n vecteurs, que peut-on dire d'une famille de $n + 1$ vecteurs de E ? (0,5 point)
- Démontrez ce lemme par récurrence sur n . (1,5 point)

- c. Déduisez-en que, si E admet une base finie, toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments. (1 point)

Exercice 2 : Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (4 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, 1), \quad u_2 = (2, 1, -1), \quad u_3 = (1, -1, -2), \quad u_4 = (1, 0, 1).$$

- Montrez que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée, en donnant une relation de dépendance linéaire. (1 point)
- Montrez que la famille (u_1, u_2, u_4) est libre. (1,5 point)
- Justifiez que (u_1, u_2, u_4) est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminez les coordonnées du vecteur $v = (1, 3, 4)$ dans cette base. (1 point)
- Déterminez le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) et une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ extraite de cette famille. (0,5 point)

Exercice 3 : Liberté de familles de fonctions (4 points)

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Montrez que la famille (f_1, f_2, f_3) , où $f_k(x) = e^{kx}$, est libre. (1,5 point)
- Montrez que la famille $(\cos, \sin, h)$, où $h(x) = x \cos x$, est libre. (1,5 point)
- On pose $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. La famille $(\cos, \sin, g)$ est-elle libre ? Justifiez. (1 point)

Exercice 4 : Sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ et formule de Grassmann (4 points)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \quad G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 2 \text{ et } x_3 = x_4\}.$$

- Déterminez une base de F et sa dimension. (1 point)
- Déterminez une base de G et sa dimension. (0,5 point)
- Déterminez $F \cap G$, une base de ce sous-espace et sa dimension. (1 point)
- À l'aide de la formule de Grassmann, calculez $\dim(F + G)$. La somme $F + G$ est-elle directe ? Que vaut $F + G$? (1 point)
- Complétez la base de $F \cap G$ trouvée en c) en une base de F , à l'aide des vecteurs $(1, -1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, -1)$. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : bases de $\mathbb{R}_2[X]$ et interpolation de Lagrange (5 points)

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2, de dimension 3. On pose

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad L_1 = -X(X-2), \quad L_2 = \frac{X(X-1)}{2}.$$

- Montrez que la famille échelonnée $(1, X-1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis donnez les coordonnées de $P = X^2 + X + 1$ dans cette base. (1,5 point)
- Calculez $L_i(j)$ pour tous $i, j \in \{0, 1, 2\}$. (1 point)
- Déduisez-en que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. (1 point)
- Montrez que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q = Q(0)L_0 + Q(1)L_1 + Q(2)L_2$. (1 point)
- Déterminez l'unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(0) = 1$, $Q(1) = 3$ et $Q(2) = 7$, et comparez avec a). (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : familles libres, bases et dimension

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Bases et dimension » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [bases et dimension](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).