

Contrôle de maths L1 : espaces vectoriels et sous-espaces

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels
- **Durée conseillée** : 1 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : vérifier les axiomes d'espace vectoriel sur une structure non usuelle
 - Chercher : décider si un ensemble est un sous-espace vectoriel et fournir un contre-exemple sinon
 - Calculer : décrire un sous-espace engendré et décomposer un vecteur sur deux supplémentaires
 - Communiquer : rédiger une analyse-synthèse pour établir une somme directe

Exercice 1 : Question de cours : intersection et union de sous-espaces (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, E est un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Énoncez la caractérisation des sous-espaces vectoriels de E . (1 point)
- Démontrez que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel de E . (1 point)

- c. Montrez, à l'aide d'un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$, que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel. (1 point)

Exercice 2 : Une structure d'espace vectoriel inhabituelle (4 points)

On note $E =]0; +\infty[$ et on munit E des deux lois suivantes : pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$x \oplus y = xy \text{ et } \lambda \odot x = x^\lambda.$$

- Montrez que $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif. Précisez son élément neutre et le symétrique d'un élément x . (1,5 point)
- Vérifiez les quatre axiomes relatifs à la loi externe $\odot$, et concluez que $(E, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. (2 points)
- On garde la loi $\oplus$, mais on munit cette fois E de la loi externe $\lambda \cdot x = \lambda x$ (produit usuel). Expliquez pourquoi on n'obtient pas un espace vectoriel. (0,5 point)

Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels ou non (5 points)

Pour chacun des ensembles suivants, dites s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace indiqué. Justifiez par une démonstration si oui, par un contre-exemple explicite si non.

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2,2y - z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$. (1 point)
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$ dans $\mathbb{R}^3$. (1 point)
- $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$. (1 point)
- $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0 \text{ et } P^{(n)}(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}[X]$. (1 point)

- e. $F_5 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f^{[\text{pririme?}]} + f = 0\}$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puis
 $F_6 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f^{[\text{pririme?}]} + f = 1\}$. (1 point)

Exercice 4 : Sous-espace engendré et somme directe dans $\mathbb{R}^3$ (4 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(w)$ avec $w = (1, 1, 1)$.

- Montrez que $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$. (1,5 point)
- Montrez que $F \cap G = \{0\}$. (1 point)
- Montrez que tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique $v = u + t w$ avec $u \in F$ et $t \in \mathbb{R}$: exprimez t et u en fonction de x, y, z . Que peut-on en conclure pour F et G ? Donnez la décomposition de $v = (2, 0, 1)$. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : fonctions paires et fonctions impaires (4 points)

On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires.

- Montrez que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E . (1 point)
- Montrez que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. (0,5 point)
- Par analyse-synthèse, montrez que toute fonction $f \in E$ s'écrit $f = p + i$ avec $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$. Concluez que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E . (1,5 point)
- Donnez la décomposition de $x \rightarrow e^x$, puis celle de $x \rightarrow (x+1)^2$. (0,5 point)
- Soit $\mathcal{G} = \{f \in E : f(0) = 0\}$, dont on admet que c'est un sous-espace vectoriel de E .

Montrez que $\mathcal{P} + \mathcal{G} = \mathcal{E}$, mais que la somme n'est pas directe. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : espaces vectoriels et sous-espaces

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Espaces vectoriels » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).