Contrôle de maths L1 : équations différentielles d'ordre 1 et 2

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L1
- **Chapitre :** Équations différentielles linéaires
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer la structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire
  - Calculer : appliquer la méthode de variation de la constante
  - Calculer : trouver une solution particulière adaptée au second membre
  - Chercher : raccorder des solutions sur deux intervalles
  - Modéliser : traduire un circuit RLC par un problème de Cauchy

Exercice 1 : Question de cours sur le premier ordre (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient a et b deux fonctions continues sur I. On note A une primitive de a sur I. On considère l'équation $(E) : y' + a(x)\,y = b(x)$ et l'équation homogène associée $(H) : y' + a(x)\,y = 0$.

a. Démontrez que les solutions de (H) sur I sont exactement les fonctions $x \to \lambda\, e^{-A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. *(2 points)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. On suppose que y_p est une solution de (E) sur I. Démontrez que y est solution de (E) si et seulement si $y - y_p$ est solution de (H). *(1 point)*

Exercice 2 : Variation de la constante et problème de Cauchy (4 points)

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_2) : y' + 2x\ y = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}.$$

a. Résolvez l'équation homogène associée à (E_2). *(1 point)*

b. À l'aide de la méthode de variation de la constante, déterminez toutes les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$. *(2 points)*

c. Déterminez l'unique solution f de (E_2) telle que $f(0) = 1$. Calculez ensuite la limite de f en $+\infty$. *(1 point)*

Exercice 3 : Raccordement de solutions en 0 (4 points)

On considère l'équation différentielle $(E_3) : x\ y' - 2y = x^3$.

a. Résolvez (E_3) sur l'intervalle $]0,+\infty[$. *(1,5 point)*

b. Résolvez (E_3) sur l'intervalle $]-\infty,0[$. *(0,5 point)*

c. Déterminez toutes les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (E_3) en tout point de $\mathbb{R}$. L'ensemble de ces solutions est-il une droite affine ? Le problème de Cauchy $y(0) = 1$ a-t-il une solution sur $\mathbb{R}$? *(2 points)*

Exercice 4 : Second ordre et principe de superposition (4 points)

On considère l'équation homogène $(H_4) : y'' - 3y' + 2y = 0$.

a. Résolvez (H_4) sur $\mathbb{R}$. *(1 point)*

b. Déterminez une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = x\,e^x$ de la forme $x \to P(x)\,e^x$, où P est un polynôme que vous préciserez. *(1,5 point)*

c. Déterminez une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$. *(1 point)*

d. Déduisez-en toutes les solutions réelles de $y'' - 3y' + 2y = x\,e^x + 10\sin x$. *(0,5 point)*

Exercice 5 : Problème : charge dans un circuit RLC (5 points)

Un circuit comporte en série une bobine d'inductance $L = 1$ H, une résistance $R = 2\ \Omega$ et un condensateur de capacité $C = 0{,}2$ F. À l'instant $t = 0$, on branche un générateur de tension constante $E = 10$ V. La charge $q(t)$ du condensateur (en coulombs) vérifie, pour $t \geq 0$:

$$L\,q''(t) + R\,q'(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = E.$$

Le condensateur est initialement déchargé et aucun courant ne circule : $q(0) = 0$ et $q'(0) = 0$. L'intensité du courant est $i(t) = q'(t)$.

a. Montrez que q est solution de $q'' + 2q' + 5q = 10$. *(0,5 point)*

b. Résolvez l'équation homogène $y'' + 2y' + 5y = 0$ et donnez ses solutions réelles. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Trouvez une solution particulière constante, puis écrivez la solution générale de l'équation de la question a. *(0,5 point)*

d. Déterminez $q(t)$ pour $t \geq 0$. *(1,5 point)*

e. Calculez $i(t)$. Déterminez ensuite la limite de $q(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interprétez-la. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : équations différentielles d'ordre 1 et 2

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Équations différentielles » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** équations différentielles.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- Contrôle de maths L1 : intégrales, équations différentielles et DL