

Contrôle de maths L1 : déterminants, Cramer et Vandermonde

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Déterminants
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la caractérisation des matrices inversibles par le déterminant
 - Calculer : obtenir un déterminant par opérations élémentaires et par développement
 - Chercher : établir une relation de récurrence pour un déterminant tridiagonal et la résoudre
 - Modéliser : résoudre un système de Cramer et inverser une matrice par la comatrice

Exercice 1 : Question de cours : déterminant et inversibilité (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On admet que le déterminant est une forme n -linéaire alternée des colonnes et que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

- Énoncez la caractérisation des matrices inversibles à l'aide du déterminant. (0,5 point)
- Démontrez que, si A est inversible, alors $\det A \neq 0$, et exprimez $\det(A^{-1})$ en fonction

de $\det A$. (1 point)

c. Démontrez que, si A n'est pas inversible, alors $\det A = 0$. (1,5 point)

Exercice 2 : Signature d'une permutation (3 points)

On considère la permutation σ de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Décomposez σ en produit de cycles à supports disjoints. (1 point)

b. Écrivez σ comme un produit de transpositions, en justifiant l'écriture de chaque cycle. (1 point)

c. Déduisez-en la signature $\epsilon(\sigma)$, puis contrôlez-la en comptant le nombre d'inversions de σ . (1 point)

Exercice 3 : Calculs de déterminants (4 points)

a. Calculez $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. (1 point)

b. Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $M(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$. Montrez, par des opérations élémentaires, que $\det M(m) = (m+2)(m-1)^2$. Pour quelles valeurs de m la matrice $M(m)$ est-elle inversible ? (1,5 point)

c. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det A = 3$. Calculez $\det(2A)$, $\det(A^{-1})$ et $\det(A^T A^2)$. (1,5 point)

Exercice 4 : Système de Cramer et comatrice (4 points)

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ y + z = 5 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$$

et on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sa matrice.

- Calculez $\det A$ et justifiez que (S) est un système de Cramer. (0,5 point)
- Résolvez (S) à l'aide des formules de Cramer. (1,5 point)
- Calculez la comatrice de A , puis A^{-1} . (1,5 point)
- Retrouvez la solution de (S) en calculant $A^{-1}B$, avec $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : déterminant tridiagonal et Vandermonde (6 points)

Partie A. Pour $n \geq 1$, on note Δ_n le déterminant de taille n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

dont les coefficients diagonaux valent 5, ceux situés juste au-dessus et juste au-dessous de la diagonale valent 2, et tous les autres sont nuls.

- En développant selon la première ligne, montrez que $\Delta_n = 5 \Delta_{n-1} - 4 \Delta_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$. (1,5 point)

b. Calculez Δ_1 et Δ_2 , puis déterminez Δ_n en fonction de n . (1,5 point)

Partie B. Pour des réels a, b, c , on pose $V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

c. Montrez que $V(a, b, c) = (b - a)(c - a)(c - b)$. (1,5 point)

d. On cherche un polynôme $P = u + vX + wX^2$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ et $P(3) = 6$. Montrez, à l'aide de c), que le problème admet une unique solution, puis déterminez P . (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : déterminants, Cramer et Vandermonde

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Déterminants » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [déterminants](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).