Contrôle de maths L1 : dérivation, Rolle et accroissements finis

Fiche du contrôle

- **Niveau :** licence L1
- **Chapitre :** Dérivation et accroissements finis
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Communiquer : démontrer le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis
  - Raisonner : étudier la dérivabilité en un point et la continuité de la dérivée
  - Calculer : obtenir une dérivée n-ième avec la formule de Leibniz
  - Chercher : dénombrer des racines et encadrer une fonction avec les accroissements finis

Exercice 1 : Théorème de Rolle et accroissements finis (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans cette question de cours, $a < b$ sont deux réels.

a. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en un point c intérieur à I. Démontrez que si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$. *(1,5 point)*

b. Énoncez et démontrez le théorème de Rolle. *(1,5 point)*

c. Déduisez-en l'égalité des accroissements finis en appliquant le théorème de Rolle à une fonction

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

auxiliaire que vous préciserez. *(1 point)*

Exercice 2 : Dérivabilité et formule de Leibniz (5 points)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a. Montrez que f est dérivable en 0 et donnez $f'(0)$. *(1 point)*

b. Calculez $f'(x)$ pour $x \neq 0$. *(0,5 point)*

c. Montrez que f' n'est pas continue en 0. Que peut-on dire de la classe de f ? *(1 point)*

d. On pose $g(x) = x^2 \, e^{2x}$. À l'aide de la formule de Leibniz, montrez que pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x :

$$g^{(n)}(x) = 2^{n-2} \, e^{2x} \left(4x^2 + 4nx + n(n-1)\right).$$

Déduisez-en $g^{(n)}(0)$. *(2,5 points)*

Exercice 3 : Théorème de Rolle et racines (4 points)

a. On pose $P(x) = x^5 - 5x + 1$. En utilisant le théorème de Rolle, montrez que P a au plus trois racines réelles, puis qu'il en a exactement trois. Vous préciserez trois intervalles de longueur 1 qui les contiennent. *(2 points)*

b. Soit $n \geq 1$ et f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I, qui s'annule en $n+1$ points distincts de I. Démontrez par récurrence sur n que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. *(1 point)*

c. Soit a, b, c trois réels. Déduisez de la question b) que l'équation $e^x = ax^2 + bx + c$ admet au plus trois solutions réelles. *(1 point)*

Exercice 4 : Accroissements finis et logarithme (7 points)

On note φ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(1+x)$.

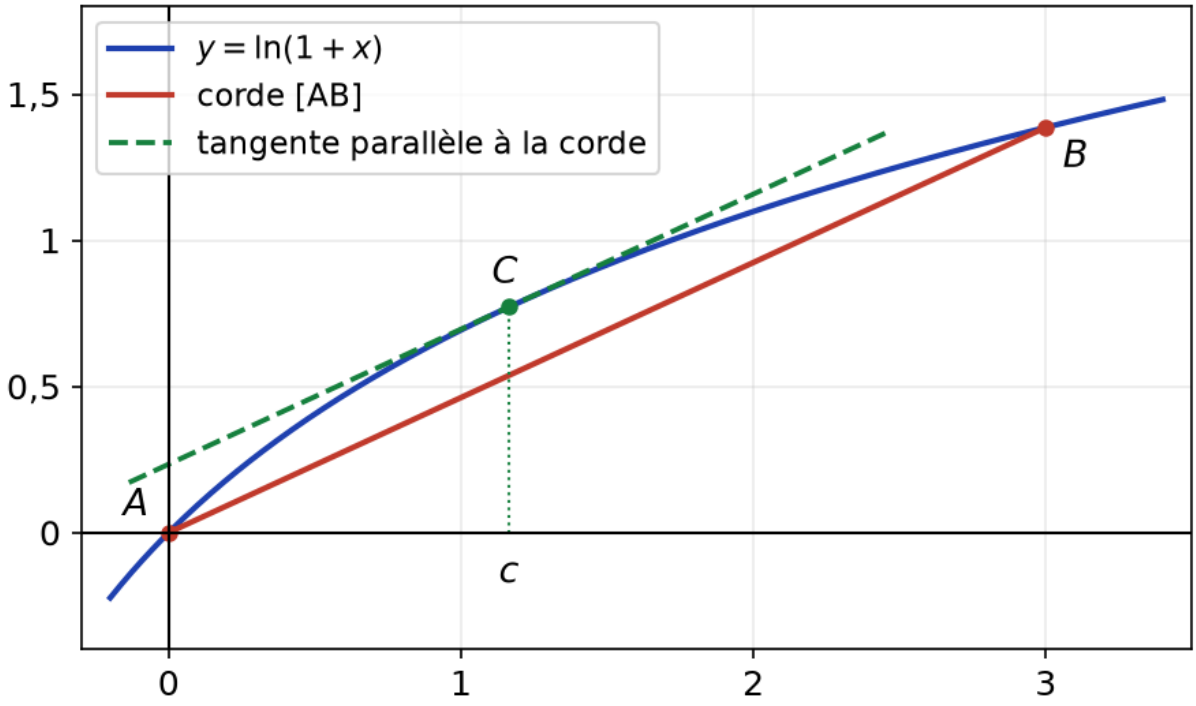
a. Soit $x > 0$. En appliquant l'égalité des accroissements finis à φ sur $[0, x]$, montrez que $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$. *(2 points)*

b. Déduisez-en la limite de $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, puis celle de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, quand n tend vers $+\infty$. *(1,5 point)*

c. On pose $h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$. Étudiez le sens de variation de h et déduisez-en que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ pour tout $x \geq 0$. Donnez alors un encadrement de $\ln(1{,}1)$ d'amplitude $0{,}005$. *(1,5 point)*

d. La figure ci-dessous montre la courbe de φ, la corde joignant $A(0\,;0)$ à $B(3\,;\ln 4)$ et une tangente parallèle à cette corde au point C d'abscisse c. Calculez c de façon exacte et justifiez, sans calculatrice, que $0 < c < 3$. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



e. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrez que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tous réels x et y, puis que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : dérivation, Rolle et accroissements finis

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Dérivation » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** dérivation.

Retrouvez tous les **contrôles de maths de L1** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- Contrôle de maths L1 : suites, continuité et dérivation

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.