

Contrôle de maths L1 : complexes, racines n-ièmes et trigonométrie

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Nombres complexes et trigonométrie
- **Durée conseillée** : 2 h
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et résoudre des équations dans $\mathbb{C}$
 - Raisonner : démontrer les propriétés des racines n-ièmes de l'unité
 - Représenter : interpréter une multiplication complexe comme une rotation ou une similitude
 - Modéliser : utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour linéariser ou factoriser

Exercice 1 : Question de cours : racines n-ièmes de l'unité (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.

- a. Démontrez que $\mathcal{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} : k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ et que ces n nombres sont deux à deux distincts. (2 points)

- b. Démontrez que la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle. (1 point)
- c. Démontrez l'inégalité triangulaire : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. (1 point)

Exercice 2 : Formules de Moivre et d'Euler (5 points)

Dans cet exercice, x et θ désignent des réels.

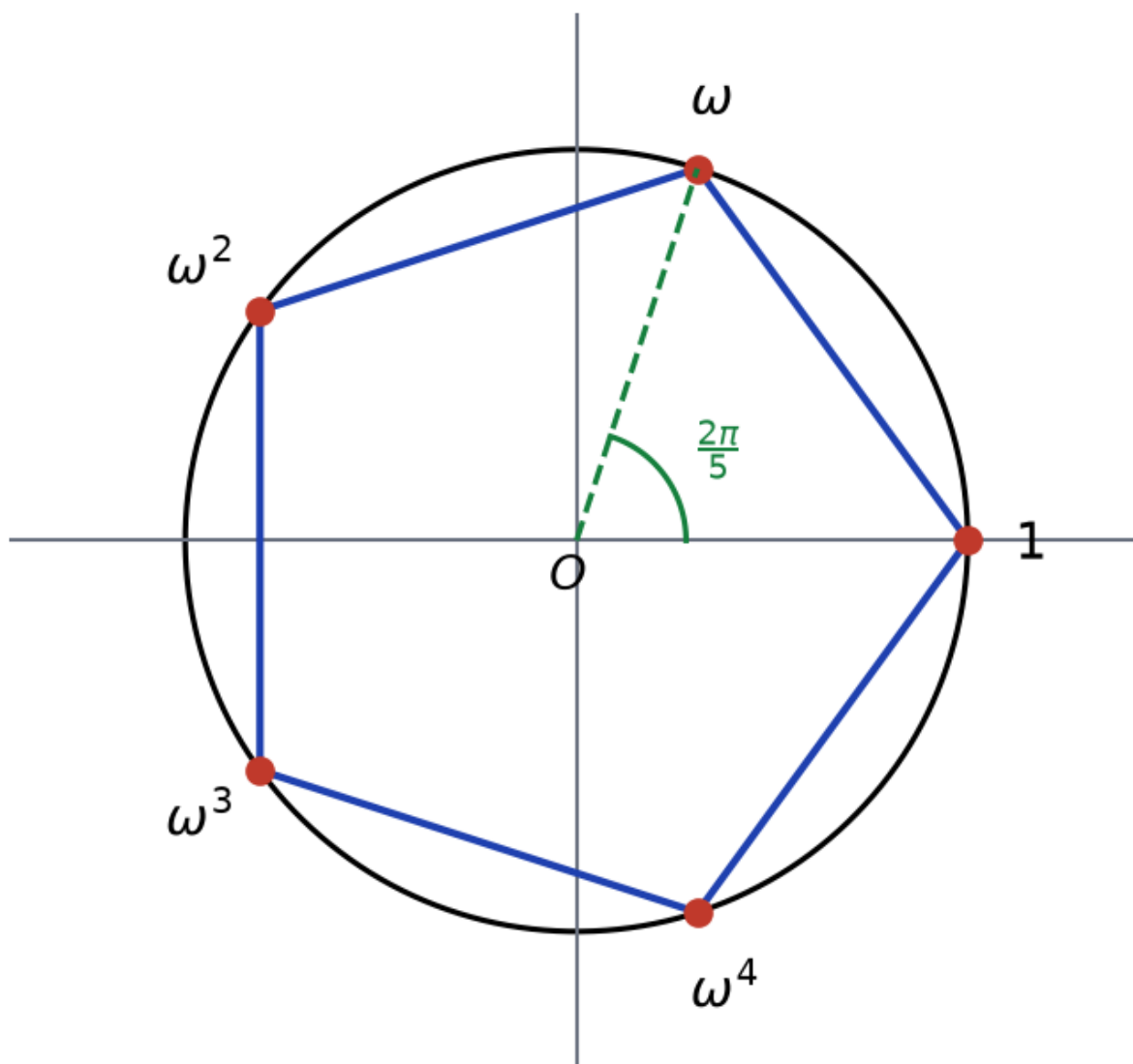
- a. À l'aide des formules d'Euler, linéarisez $\cos^3 x$. (1,5 point)
- b. À l'aide de la formule de Moivre, exprimez $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ seulement. (1 point)
- c. Factorisez $1 + e^{i\theta}$ par $e^{i\theta/2}$. Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, déduisez-en le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$. (1,5 point)
- d. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Calculez $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ sous forme d'un produit de sinus et de cosinus divisé par $\sin \frac{x}{2}$. (1 point)

Exercice 3 : Équations dans $\mathbb{C}$ (5 points)

- a. Déterminez, sous forme algébrique, les racines carrées complexes de $-8 - 6i$. (1,5 point)
- b. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$. (1,5 point)
- c. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$. Donnez les solutions sous forme exponentielle puis algébrique, et précisez la figure qu'elles forment dans le plan complexe. (2 points)

Exercice 4 : Problème : pentagone régulier et cosinus de 2π sur 5 (6 points)

On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$. Les points d'affixes 1 , ω , ω^2 , ω^3 , ω^4 sont représentés sur le cercle unité ci-dessous.



- Justifiez que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$. (0,5 point)
- On pose $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$. Démontrez que $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, que $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$, puis que $a + b = -1$ et $ab = -1$. (2 points)
- Déduisez-en la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$. (1,5 point)

- d. Démontrez que la rotation $z \rightarrow \omega z$ permute les cinq points, puis que les cinq côtés du pentagone ont la même longueur $2\sin\frac{\pi}{5}$. (1 point)
- e. Soit f l'application du plan complexe définie par $f(z) = (1+i)z + 2$. Déterminez l'axe z_0 de son unique point fixe, écrivez $f(z) - z_0$ en fonction de $z - z_0$, et donnez la nature de f . Quelle est l'image du pentagone par f (centre et longueur des côtés) ? (1 point)



Réviser avant le contrôle : complexes, racines n-ièmes et trigonométrie

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Nombres complexes » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres complexes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : polynômes, arithmétique et nombres complexes](#)