

## Contrôle de maths L1 : bijections et relations d'équivalence

### Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Applications et relations binaires
- **Durée conseillée** : 1 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées** :
  - Raisonner : démontrer qu'une application est injective, surjective ou bijective
  - Calculer : déterminer une image directe, une image réciproque et une bijection réciproque explicite
  - Chercher : produire un contre-exemple à une propriété de la composition
  - Communiquer : décrire les classes d'une relation d'équivalence et les éléments remarquables d'un ordre

### Exercice 1 : Question de cours : composition et injectivité (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

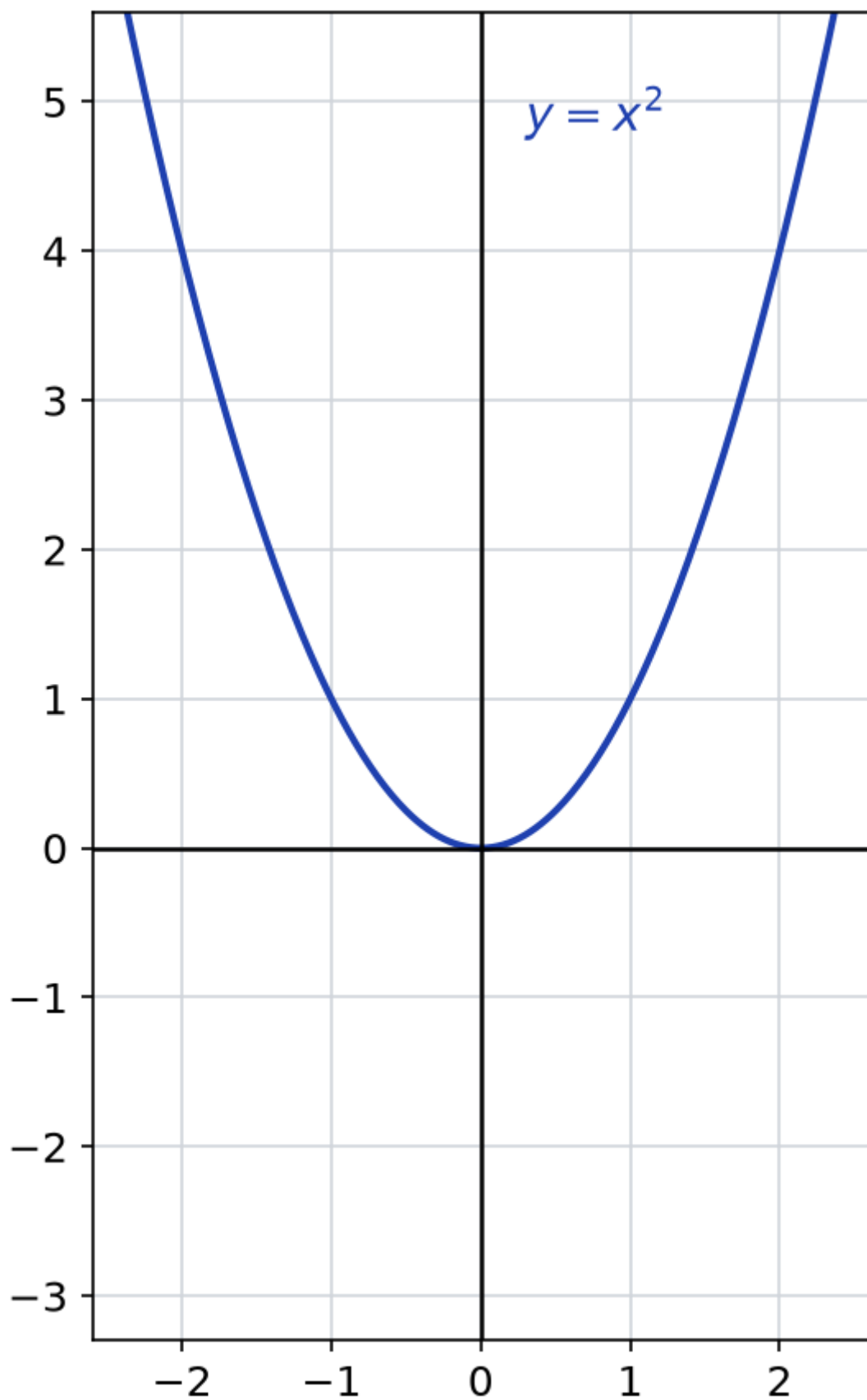
Soient  $E$ ,  $F$ ,  $G$  trois ensembles,  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  deux applications.

- a. Rappelez les définitions d'une application injective et d'une application surjective. Démontrez ensuite que si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective, et que si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective. (2,5 points)

- b. Montrez à l'aide d'un contre-exemple que  $g \circ f$  peut être injective sans que  $g$  le soit. (1,5 point)

### **Exercice 2 : Images directes et réciproques par la fonction carré (4 points)**

On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $x \rightarrow x^2$ , dont la courbe est représentée ci-dessous. Toutes les réponses doivent être démontrées ; la figure ne sert qu'à conjecturer.



a. Déterminez l'image directe  $f([-1,2])$ . (1 point)

- b. Déterminez l'image réciproque  $f^{-1}([1,4])$ . (1 point)
- c. Déterminez  $f^{-1}([-3,-1])$ , puis  $f(f^{-1}([-1,4]))$ . Comparez ce dernier ensemble à  $[-1,4]$ . (1 point)
- d. Soit  $u: E \rightarrow F$  une application quelconque et  $B \subset F$ . Démontrez que  $u(u^{-1}(B)) \subset B$ , et qu'il y a égalité lorsque  $u$  est surjective. (1 point)

### Exercice 3 : Deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (5 points)

On définit les applications  $\varphi$  et  $\psi$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $\varphi(x,y) = (x+y, x-y)$  et  $\psi(x,y) = (x+y, xy)$ .

- a. Démontrez que  $\varphi$  est bijective et déterminez explicitement sa bijection réciproque  $\varphi^{-1}$ . (2 points)
- b. L'application  $\psi$  est-elle injective ? Justifiez. (1 point)
- c. Soit  $(s,p) \in \mathbb{R}^2$ . Démontrez que  $(s,p)$  admet un antécédent par  $\psi$  si et seulement si  $s^2 - 4p \geq 0$ . L'application  $\psi$  est-elle surjective ? Décrivez son image. (2 points)

### Exercice 4 : Problème : relation d'équivalence et ordre de divisibilité (7 points)

**Partie A.** On définit sur  $\mathbb{R}^2$  la relation  $\mathcal{R}$  par :  $(x,y) \mathcal{R} (x',y')$  si et seulement si  $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ .

- a. Démontrez que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. (1,5 point)
- b. Décrivez géométriquement la classe d'équivalence d'un point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Distinguez le cas de l'origine. (1 point)

- c. On note  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des classes d'équivalence. Démontrez que l'application qui à une classe  $C$  associe la valeur commune de  $x^2+y^2$  pour  $(x,y) \in C$  est bien définie et réalise une bijection de  $\mathcal{Q}$  sur  $[0,+\infty[$ . (1,5 point)

**Partie B.** On munit  $\mathbb{N}^*$  de la relation de divisibilité :  $a \mid b$  si et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $b = ka$ .

- d. Démontrez que la divisibilité est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}^*$ . (1,5 point)
- e. Cet ordre est-il total ? Justifiez. (0,5 point)
- f. Soit  $A = \{2, 3, 4, 6\}$ . Déterminez l'ensemble des majorants de  $A$  pour la divisibilité et son plus petit élément. La partie  $A$  admet-elle un plus grand élément ? (1 point)



## **Réviser avant le contrôle : bijections et relations d'équivalence**

---

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Applications et relations](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [applications et relations](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).