

Contrôle de maths L1 : arithmétique, Bézout, Gauss et congruences

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Arithmétique des entiers
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le lemme de Gauss à partir du théorème de Bézout
 - Calculer : mener l'algorithme d'Euclide étendu et résoudre une équation diophantienne
 - Calculer : exploiter la décomposition en facteurs premiers (pgcd, ppcm, diviseurs)
 - Chercher : utiliser les congruences et le petit théorème de Fermat
 - Modéliser : traduire un problème de restes par un système de congruences

Exercice 1 : Question de cours : le lemme de Gauss (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, a , b , c désignent des entiers relatifs.

- Énoncez le théorème de Bézout. (1 point)
- Énoncez le lemme de Gauss, puis démontrez-le à l'aide du théorème de Bézout. (2 points)

Exercice 2 : Algorithme d'Euclide étendu et équation diophantienne (6 points)

- a. Appliquez l'algorithme d'Euclide étendu à 255 et 141. Présentez les calculs dans un tableau à quatre colonnes : reste r_k , quotient q_k , coefficients u_k et v_k tels que $r_k = 255 u_k + 141 v_k$. En déduire $d = \text{pgcd}(255, 141)$ et un couple (u, v) d'entiers vérifiant $255 u + 141 v = d$. (2,5 points)
- b. Déterminez tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation $255 x + 141 y = 12$. (3 points)
- c. L'équation $255 x + 141 y = 10$ admet-elle des solutions entières ? Justifiez. (0,5 point)

Exercice 3 : Décomposition en facteurs premiers (3 points)

On pose $n = 3600$ et $m = 756$.

- a. Décomposez n et m en produit de facteurs premiers. Combien n possède-t-il de diviseurs positifs ? Justifiez. (1 point)
- b. En déduire $\text{pgcd}(n, m)$ et $\text{ppcm}(n, m)$. (1 point)
- c. Déterminez le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $n k$ soit le cube d'un entier. (1 point)

Exercice 4 : Congruences et petit théorème de Fermat (3 points)

- a. Énoncez le petit théorème de Fermat, puis déterminez le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 7. (1 point)
- b. Montrez que, pour tout entier n , l'entier $n^7 - n$ est divisible par 42. (2 points)

Exercice 5 : Problème : un trésor et des restes (5 points)

Un groupe de pirates compte ses pièces d'or. Réparties en paquets de 5, il en reste 2 ; en paquets de 7, il en reste 3 ; en paquets de 3, il en reste 1. On sait que le trésor compte entre 300 et 400 pièces.

- Justifiez que 5 et 7 sont premiers entre eux et trouvez deux entiers u et v tels que $5u + 7v = 1$. (1 point)
- Montrez qu'un entier N vérifie à la fois $N \equiv 2 \pmod{5}$ et $N \equiv 3 \pmod{7}$ si et seulement si $N \equiv 17 \pmod{35}$. (2 points)
- Déterminez le nombre de pièces du trésor. (2 points)



Réviser avant le contrôle : arithmétique, Bézout, Gauss et congruences

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Arithmétique dans \$\mathbb{Z}\$ » en L1](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [arithmétique dans \$\mathbb{Z}\$](#) .

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths de L1 sur ce thème

- [Contrôle de maths L1 : polynômes, arithmétique et nombres complexes](#)