

Contrôle de maths L1 : applications linéaires, noyau, image et rang

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L1
- **Chapitre** : Applications linéaires
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la caractérisation de l'injectivité par le noyau
 - Calculer : déterminer un noyau et une image par un système linéaire
 - Chercher : utiliser le théorème du rang pour conclure sans calcul
 - Représenter : décrire un projecteur et une symétrie de l'espace
 - Raisonner : étudier un endomorphisme nilpotent et une famille libre

Exercice 1 : Question de cours : injectivité et théorème du rang (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout l'exercice, E et F sont deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Démontrez que f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$. (1 point)
- On suppose E de dimension finie. Énoncez le théorème du rang. Dédisez-en que, pour un endomorphisme u de E , les trois propriétés « u injectif », « u surjectif » et « u bijectif » sont équivalentes. (2 points)

Exercice 2 : Une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ (4 points)

On définit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y + z)$.

- Montrez que f est linéaire. (0,5 point)
- Déterminez $\text{Ker } f$ et donnez-en une base. (1,5 point)
- Déduisez-en le rang de f sans calculer l'image. L'application f est-elle surjective ? injective ? (1 point)
- Déterminez l'ensemble des antécédents du vecteur $(1, 2)$ par f . (1 point)

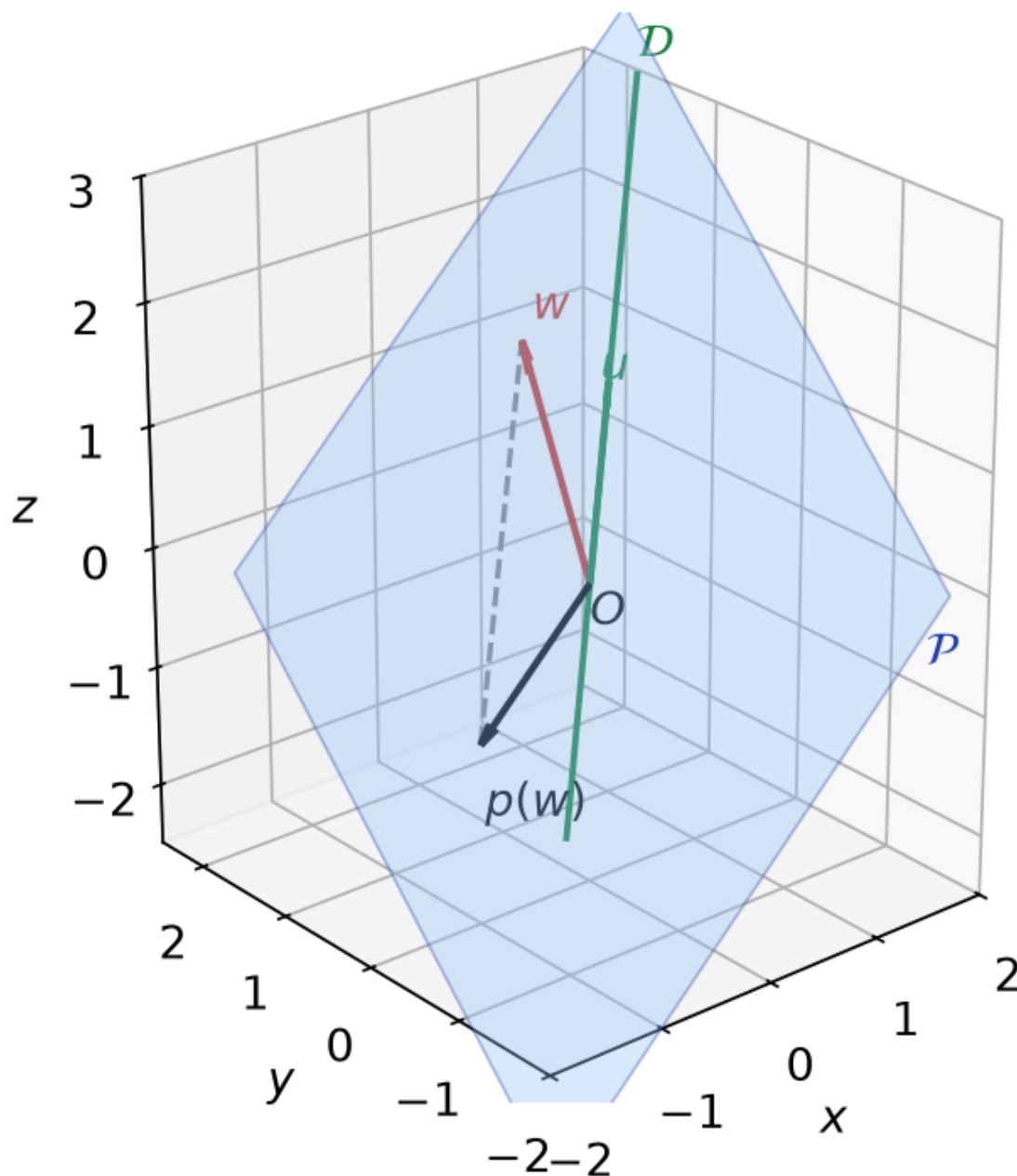
Exercice 3 : La dérivation sur les polynômes (4 points)

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus n , et $D : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par $D(P) = P'$.

- Justifiez que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. (0,5 point)
- Déterminez $\text{Ker } D$. À l'aide du théorème du rang, déterminez ensuite $\text{Im } D$. (1,5 point)
- Montrez que $D^{n+1} = 0$ et que $D^n \neq 0$. (1 point)
- On pose $\psi = \text{id} - D$. Montrez que ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\psi^{-1} = \text{id} + D + D^2 + \dots + D^n$. Pour $n = 2$, déduisez-en l'unique polynôme P tel que $P - P' = X^2$. (1 point)

Exercice 4 : Projection sur un plan parallèlement à une droite (4 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z = 0$ et la droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$, où $u = (1, 1, 1)$. La figure ci-dessous représente $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$, le vecteur $w = (1, 2, 1)$ et son projeté $p(w)$.



(La figure n'est pas à l'échelle.)

- Montrez que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. (1 point)
- On note p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$. Déterminez $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, puis calculez $p(w)$. (1,5 point)
- Écrivez la matrice M de p dans la base canonique et vérifiez que $M^2 = M$. (0,5 point)
- On note s la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$. Exprimez s à l'aide de p , puis déterminez $s(x, y, z)$. Vérifiez que $s(u) = -u$. (1 point)

Exercice 5 : Problème : un endomorphisme nilpotent (5 points)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent d'indice $p \geq 1$ si $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, avec la convention $u^0 = \text{id}_E$.

Partie A : cas général

- On suppose u nilpotent d'indice p . Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Démontrez que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. (1,5 point)
- Déduisez-en que $p \leq n$, puis que $u^n = 0$. (0,5 point)

Partie B : un exemple dans $\mathbb{R}^3$

Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c. Calculez A^2 et A^3 . Quel est l'indice de nilpotence de v ? (1 point)
- d. Déterminez $\text{Ker } v$, $\text{Im } v$ et le rang de v . Vérifiez que $\text{Ker } v \subset \text{Im } v$. (1 point)
- e. Montrez que $\mathcal{B}' = (e_1, v(e_1), v^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donnez la matrice de v dans cette base. (1 point)



Réviser avant le contrôle : applications linéaires, noyau, image et rang

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Applications linéaires](#) » en L1 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [applications linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L1 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).