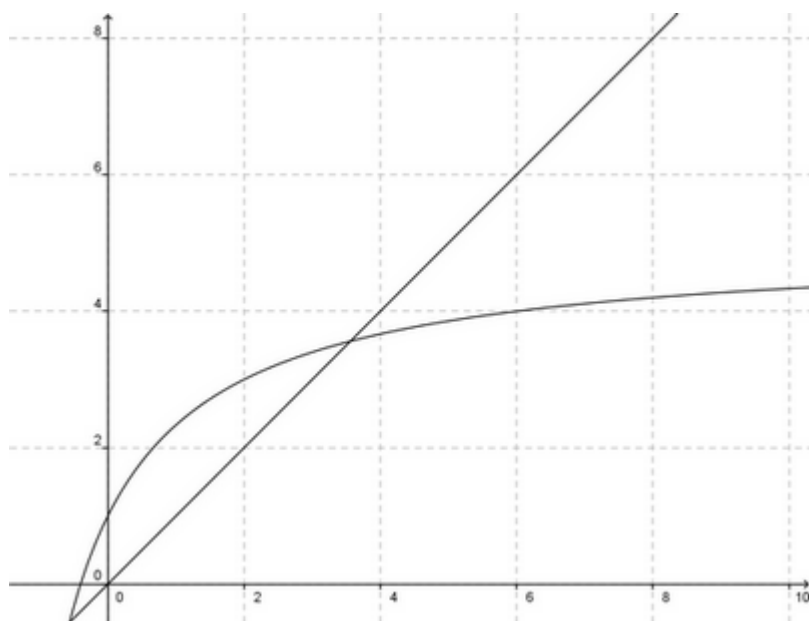


## Continuité d'une fonction

### Exercice 1 :

soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 5 - \frac{8}{x+2}$ .

**Indication : voici la courbe de cette fonction.**



1. Etudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

On note  $\alpha$  cette solution.

### Exercice 2 :

Montrer qu'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  qui ne s'annule jamais est de signe constant.

Effectuons un raisonnement par l'absurde.

Considérons que cette fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  et qui ne s'annule jamais change de signe.

soit  $a < b$  alors imaginons le cas  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ .

or comme  $f$  est continue sur  $R$  et que  $f(a)f(b) < 0$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires

alors cela signifie qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $f(c) = 0$  cela signifierait que  $f$  s'annule or ce n'est pas le cas.

Conclusion : une fonction continue sur  $R$  qui ne s'annule jamais est de signe constant.

### **Exercice 3 :**

Montrer que l'équation  $\tan x = x$  possède une unique solution dans  $] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} [$ .

Notons  $f(x) = \tan x - x$  elle est définie et dérivable sur  $] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} [$ .

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$$

donc  $f$  est strictement croissante et continue sur  $] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} [$  et change de signe sur  $] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} [$

donc elle s'annule une seule fois sur  $] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} [$ .

### **Exercice 4 :**

Soit  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  une application continue. On va montrer par récurrence que  $f$  admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = c$ .

Pour  $n = 1$ , le théorème de la valeur intermédiaire assure que si  $f(a) \neq a$  et  $f(b) \neq b$ , alors  $f(a) > a$  et  $f(b) < b$  ou bien  $f(a) < a$  et  $f(b) > b$  (par exemple si  $f(a) < a$  et  $f(b) < b$ , alors l'image de  $[a, b]$  par  $f$  est contenue dans l'intervalle  $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$  qui ne contient pas  $[a, b]$ , ce qui contredit le fait que  $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ ). Par conséquent, il existe un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = c$ .

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tout entier inférieur ou égal à  $n$ , et considérons une application continue  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ .

Si  $f(a) = a$  ou  $f(b) = b$ , alors on a un point fixe et on a terminé.

Sinon, on peut appliquer le raisonnement précédent à la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[f(a), b]$  ou à l'intervalle  $[a, f(b)]$ . Dans les deux cas, on obtient l'existence d'un point fixe  $c \in [a, b]$  de cette restriction. Si  $c \in \{a, b\}$ , alors on a terminé. Sinon, on a  $f(c) \in [f(a), b]$  ou  $f(c) \in [a, f(b)]$ , donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[f(a), c]$  ou à l'intervalle  $[c, f(b)]$ . Dans les deux cas, on obtient l'existence d'un point fixe de cette restriction, qui est aussi un point fixe de  $f$ .

### **Exercice 5:**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$ .

Montrer que  $f$  possède une unique racine puis en donner un encadrement d'amplitude 0,01.

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$$

donc sur  $\mathbb{R}^+$   $f' > 0$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(x) = -3$$

$f$  est strictement croissante et continue et passe d'une valeur négative à une valeur positive sur  $[0; +\infty[$

donc

$f$  possède une unique racine sur  $[0; +\infty[$  d'après le théorème de bijection.

### Exercice 6 :

Soit  $P$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ .

#### 1. Dresser le tableau de variations de $P$ .

$$P'(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

$$P'(x) = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right)$$

$$P'(x) = 3\left(\left(x + \frac{2}{6}\right)^2 - \frac{4}{36} - 1\right)$$

$$P'(x) = 3\left(\left(x + \frac{2}{6}\right)^2 - \frac{40}{36}\right)$$

$$P'(x) = 3\left[\left(x + \frac{2}{6} - \sqrt{\frac{40}{36}}\right)\left(x + \frac{2}{6} + \sqrt{\frac{40}{36}}\right)\right]$$

$$P'(x) = 3\left[\left(x + \frac{2}{6} - \frac{\sqrt{40}}{6}\right)\left(x + \frac{2}{6} + \frac{\sqrt{40}}{6}\right)\right]$$

$$P'(x) = 3\left[\left(x + \frac{2 - 2\sqrt{10}}{6}\right)\left(x + \frac{2 + 2\sqrt{10}}{6}\right)\right]$$

$$P'(x) = 3\left(x + \frac{1 - \sqrt{10}}{3}\right)\left(x + \frac{1 + \sqrt{10}}{3}\right)$$

2. En déduire le nombre de racines de  $P$ .

**$P$  admet trois racines distinctes.**

### 3. Retrouver directement ces racines en factorisant $P(x)$ ..

1 est une racine évidente

donc

$$P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$$

$$P(x) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

**Par identification des coefficients :**

$$a = 1$$

$$b-a = 1$$

$$c-b = -3$$

$$c = -1$$

donc

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c-b = -3$$

$$c = -1$$

ainsi

$$P(x) = (x-1)(x^2+2x-1)$$

$$P(x) = (x-1)((x+1)^2-1-1)$$

$$P(x) = (x-1)((x+1)^2-2)$$

$$P(x) = (x-1)((x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}))$$

Conclusion : les trois racines distinctes sont  $1; \sqrt{2}-1; -\sqrt{2}-1$  .

### **Exercice 7 :**

Montrer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Soit  $p$  un polynôme de degré impair

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$

de plus  $P$  est un polynôme donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

$P$  passe donc d'une valeur négative à une valeur positive donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

il existe au moins une racine réelle.

$$\exists x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$$

### **Exercice 8 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ .

Montrer que  $f$  possède une unique racine.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 + 3x^2 + 1 = 5\left(x^4 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}\right) \\ &= 5\left[\left(x^2 + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100} + \frac{1}{5}\right] \\ &= 5\left[\left(x^2 + \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{100}\right] > 0 \end{aligned}$$

donc  $f$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}$

de plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

donc  $f$  passe d'une valeur négative à une valeur positive

on peut en déduire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que  $f$  admet une unique racine sur  $\mathbb{R}$ .