

Conjugué, module et argument d'un nombre complexe

I. Conjugué d'un nombre complexe.

1. Définition du conjugué.

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (x, y réels).

Le nombre complexe $x - iy$, noté $\bar{z}$, est appelé conjugué du nombre complexe z .

Exemples :

$$\overline{2+3i} = 2-3i ; \bar{3} = 3 ; \overline{-7} = -7 ; \overline{2i} = -2i ; \overline{-5i} = 5i .$$

Conséquences :

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z\bar{z} = x^2 + y^2$
3. $z + \bar{z} = 2 \times \operatorname{Re}(z) = 2x$
4. $z - \bar{z} = 2 \times \operatorname{Im}(z) = 2iy$

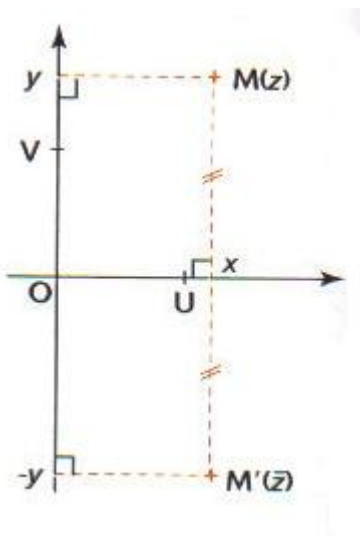
2. Interprétation géométrique.

Dans le plan complexe, considérons un point M d'affixe z alors le point M' d'affixe $\bar{z}$ est l'image de M par la symétrie par rapport à l'axe des réels (abscisses).

Propriétés :

Soit z un nombre complexe.

1. z est réel $\iff z = \bar{z}$.
2. z est imaginaire pur $\iff z = -\bar{z}$.



3. Conjugué et opérations.

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$\text{Si } z \neq 0, \frac{1}{z} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\text{Si } z' \neq 0, \frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

II. Module et argument d'un nombre complexe.

1. Module d'un nombre complexe.

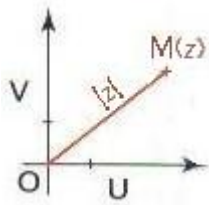
Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+iy$ (x et y réels).

Le module de z est le nombre réel positif noté $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Interprétation géométrique :

Dans le plan complexe, si M a pour affixe z alors $OM=|z|$.



Remarque :

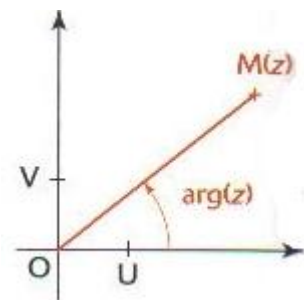
1. Si x est un réel, le module de x est égal à la valeur absolue de x .
2. $|z| = 0$ si et seulement $z = 0$ (car $\overrightarrow{OM} = 0$ équivaut à $O=M$)
3. $z\bar{z} = |z|^2$.

2. Arguments d'un nombres complexe non nul.

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul, de point image M .

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OM})$.



Remarque:

Un nombre complexe non nul z a une infinité d'argument; si θ est l'un d'entre eux alors tous les autres sont de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On note $\arg(z) = \theta [2\pi]$ ou plus simplement $\arg(z) = \theta$

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.

3.1. Repérages cartésien et polaire :

Dans le plan complexe un point M distinct de O peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ ou par un couple (r, θ) de coordonnées polaires avec $OM=r$ et $(\vec{OU}, \vec{OM})$,

on a alors :

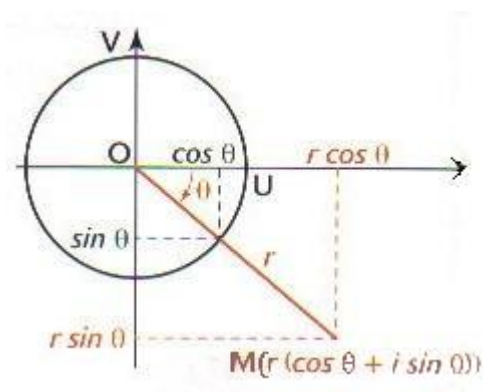
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

3.2 Forme trigonométrique :

Définition :

Soit z un **nombre complexe** non nul.

L'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$ et $\theta = \arg(z)$ est appelée **forme trigonométrique** de z .



Propriété :

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si, ils ont même module et même argument à un multiple de 2π près.

Propriété :

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ alors $\boxed{}$ et $\theta = \arg(z)$.