

Complétude et point fixe

Exercice 1 : Une suite de Cauchy de rationnels

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. On admet que (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ vers e .

1. Montrer que toute suite de Cauchy d'un espace métrique est bornée.
2. Montrer que $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 1$, puis que $0 \leq u_q - u_p \leq \frac{1}{2^{p-1}}$ pour $q \geq p \geq 1$. En déduire que (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que $0 < e - u_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ pour tout $n \geq 1$.
4. En déduire que e est irrationnel, puis que $\mathbb{Q}$ muni de $|x - y|$ n'est pas complet.

Exercice 2 : Suites qui ne sont pas de Cauchy

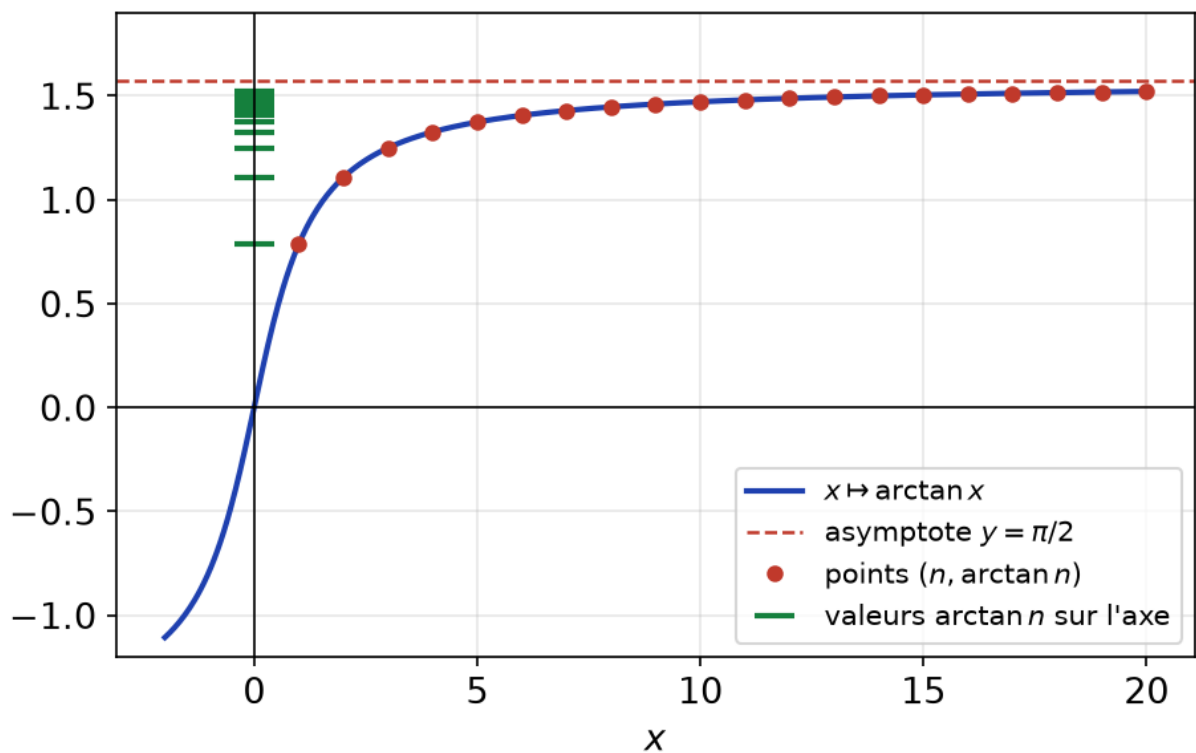
Dans cet exercice, (E, d) est un espace métrique.

1. Soit $u_n = \sqrt{n}$. Montrer que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ mais que (u_n) n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. Conclure.
3. Montrer que si la série $\sum d(x_n, x_{n+1})$ converge, alors (x_n) est de Cauchy dans E .

4. Montrer que la réciproque est fautive, à l'aide de $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ dans $\mathbb{R}$ ($n \geq 1$).

Exercice 3 : Distance arctangente et distance discrète

Sur $\mathbb{R}$, on pose $\delta(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. La figure ci-dessous représente la fonction arctangente et les valeurs $\arctan n$, qui s'accumulent sous $\pi/2$.



1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'une suite (x_n) converge vers x pour δ si et seulement si elle converge vers x pour la distance usuelle.
3. Montrer que la suite $(n)_n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy pour δ mais ne converge pas. Que peut-on en conclure sur $(\mathbb{R}, \delta)$?
4. Sur un ensemble X , on note $d_0(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d_0(x, x) = 0$. Déterminer les

suites de Cauchy de (X, d_0) et montrer que cet espace est complet.

Exercice 4 : Polynômes et norme des coefficients

Pour $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $|P| = \max_k |a_k|$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et que, pour tout k , $|a_k(P)| \leq |P|$, où $a_k(P)$ désigne le coefficient de X^k .
2. On pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{2^k}$. Calculer $|P_q - P_p|$ pour $q > p$ et en déduire que (P_n) est de Cauchy.
3. Montrer que (P_n) ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Conclure.

Exercice 5 : Sous-espaces de dimension finie

On travaille dans $E = C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

1. Rappeler pourquoi tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degré au plus 2 qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f . Montrer que f est polynomiale de degré au plus 2.
3. On pose $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Montrer que $\|Q_n - \exp\|_\infty \leq \sum_{k > n} \frac{1}{k!}$ et en déduire que $Q_n \rightarrow \exp$ dans E .
4. En déduire que le sous-espace des fonctions polynomiales n'est pas fermé dans E , et qu'il n'est pas complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

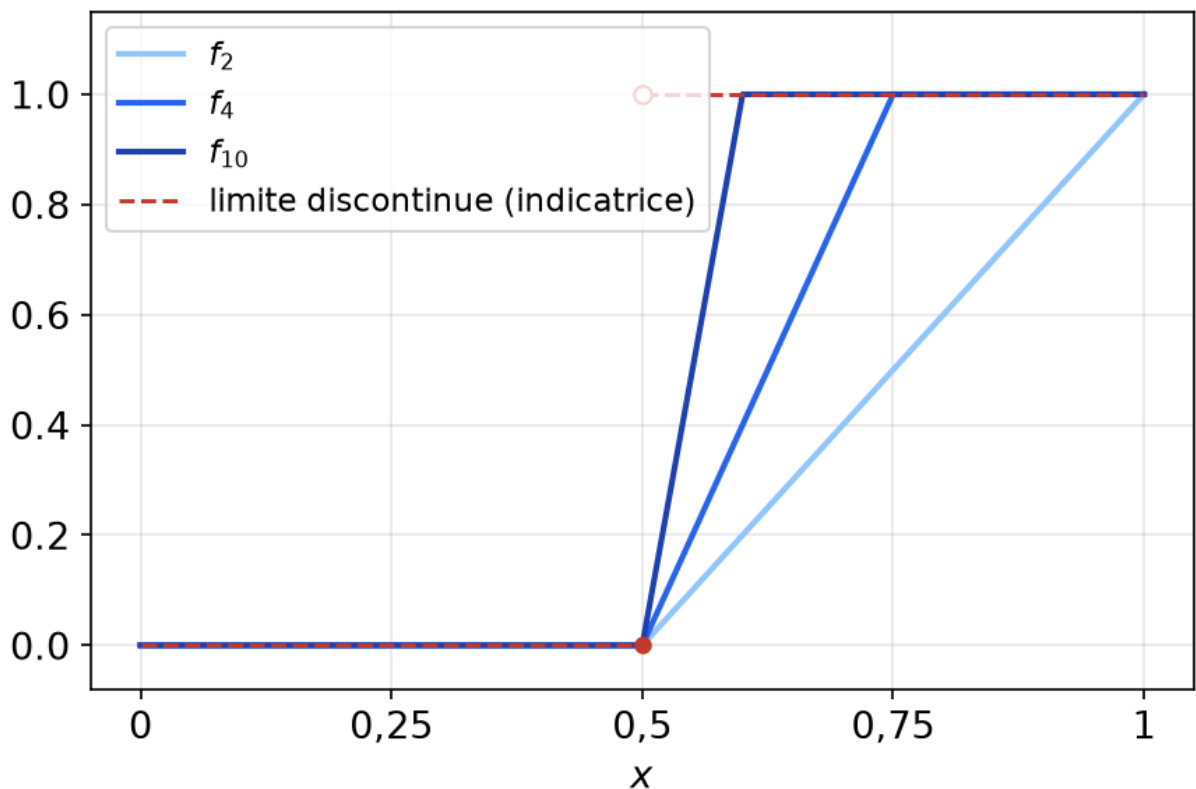
Exercice 6 : Suites bornées et suites de limite nulle

On note ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, muni de $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$. On note c_0 le sous-espace des suites de limite nulle et c_{00} celui des suites nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que ℓ^∞ est un espace de Banach.
2. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞ . En déduire que c_0 est un espace de Banach.
3. Soit $x = \left(\frac{1}{k+1}\right)_k$ et $x^{(N)}$ la suite égale à x_k pour $k \leq N$ et nulle ensuite. Calculer $\|x - x^{(N)}\|_\infty$.
4. En déduire que c_{00} n'est pas complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7 : Norme de la moyenne sur les fonctions continues

On munit $C([0,1])$ de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Pour $n \geq 2$, on définit f_n continue, nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$, affine sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et égale à 1 sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$. La figure ci-dessous montre f_2 , f_4 et f_{10} .



1. Calculer $\int_0^1 f_n$, puis montrer que $f_q \geq f_p$ pour $q \geq p \geq 2$.
2. En déduire $\|f_q - f_p\|_1$ pour $q \geq p$, et montrer que (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$.
3. Montrer que (f_n) ne converge vers aucune fonction continue pour $\|\cdot\|_1$. Conclure.
4. Calculer $\|f_{2p} - f_p\|_\infty$. La suite est-elle de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 8 : Fonctions de classe C^1 et choix de la norme

On note $E = C^1([0,1])$ l'espace des fonctions réelles de classe C^1 sur $[0,1]$.

1. Soit $g_n(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}$. Montrer que $0 \leq g_n(x) - \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n}$. En déduire que

$(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

2. On pose $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E et que $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
3. Montrer que (E, N) est un espace de Banach.

Exercice 9 : Une série de fonctions dans $C([0, 2\pi])$

On travaille dans l'espace de Banach $C([0, 2\pi])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $k \geq 1$, on pose

$$u_k(x) = \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

1. Calculer $\|u_k\|_\infty$. Montrer que la série $\sum u_k$ converge dans $C([0, 2\pi])$. On note S sa somme.
2. Montrer que $\sum_{k > N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{N}$ pour $N \geq 1$, et en déduire $\|S - S_N\|_\infty \leq \frac{1}{N}$, où $S_N = \sum_{k=1}^N u_k$.
3. Combien de termes suffisent pour approcher S à 10^{-2} près, uniformément ?

4. Calculer $\int_0^{2\pi} S(x) dx$ en justifiant l'échange de la somme et de l'intégrale.

Exercice 10 : Série de Neumann matricielle

On munit $\mathbb{R}^2$ de $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée, qui vaut $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $|A| < 1$. Montrer que $\sum_{k \geq 0} A^k$ converge, que $I_2 - A$ est inversible d'inverse $\sum_{k \geq 0} A^k$, et que $|(I_2 - A)^{-1}| \leq \frac{1}{1 - |A|}$.
2. Application : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , puis $\sum_{k \geq 0} A^k$. Vérifier le résultat et comparer $|(I_2 - A)^{-1}|$ à la majoration.
3. Soit M inversible et H avec $|H| < \frac{1}{|M^{-1}|}$. Montrer que $M + H$ est inversible. En déduire que $GL_2(\mathbb{R})$ est ouvert.

Exercice 11 : Caractérisation des espaces de Banach par les séries

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. On suppose E complet. Montrer que toute série absolument convergente de E converge, et que $\left\| \sum x_n \right\| \leq \sum |x_n|$.
2. On suppose que toute série absolument convergente de E converge. Soit (y_n) une suite de Cauchy. Construire une extraction φ telle que $|y_{\varphi(k+1)} - y_{\varphi(k)}| \leq 2^{-k}$ pour tout k .
3. En déduire que $(y_{\varphi(k)})$ converge, puis que (y_n) converge. Conclure.
4. Application : dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$, exhiber une série absolument convergente qui ne converge pas. On pourra utiliser les fonctions f_n de l'exercice 7 avec $n = 2^k$.

Exercice 12 : Résolution de $x = \cos x$

On note $I = [0, 1]$ et $f = \cos$.

1. Montrer que $f(I) \subset I$ et que f est contractante sur I de constante $k = \sin 1$.
2. En déduire que l'équation $\cos x = x$ a une unique solution ℓ dans I , puis dans $\mathbb{R}$.
3. On part de $x_0 = 0$. Déterminer, par la majoration a priori, un nombre d'itérations qui garantit $|x_n - \ell| \leq 10^{-6}$. On donne $\sin 1 \approx 0,841\,47$.
4. On a calculé $x_{29} \approx 0,739\,089\,3$ et $x_{30} \approx 0,739\,082\,3$. Donner une majoration a posteriori de $|x_{30} - \ell|$.

Exercice 13 : Méthode de Héron pour la racine de 2

On pose $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ sur $I = [1, 2]$.

1. Montrer que $g(I) \subset I$ et que g est $\frac{1}{2}$ -contractante sur I .
2. En déduire que la suite $x_0 = 1$, $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\sqrt{2}$. Calculer x_1, x_2, x_3 sous forme de fractions.
3. Donner la majoration a posteriori de $|x_3 - \sqrt{2}|$.
4. Montrer que $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n}$. Que dire de la vitesse réelle de convergence ?

Exercice 14 : Un système non linéaire dans le plan

On cherche les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos y \\ y = \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

1. Écrire le système sous la forme $X = F(X)$ et montrer que F est $\frac{1}{2}$ -contractante sur $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
2. En déduire que le système a une unique solution X^* .
3. On part de $X_0 = (0, 0)$. Calculer X_1 et X_2 , puis majorer $\|X_n - X^*\|_\infty$ a priori.
4. On donne $X_6 \approx (0,460\,951; 0,398\,282)$ et $X_7 \approx (0,460\,864; 0,398\,267)$. Majorer $\|X_7 - X^*\|_\infty$.

Exercice 15 : Les hypothèses du théorème du point fixe

1. Montrer que $f(x) = \frac{x}{2}$ est contractante de $]0, 1]$ dans $]0, 1]$ et n'a pas de point fixe. Quelle hypothèse manque ?
2. Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $I = [1, +\infty[$. Montrer que $f(I) \subset I$, que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$ dans I , et que f n'a pas de point fixe.
3. Montrer que, dans la question 2, il n'existe aucune constante $k < 1$ telle que f soit k -lipschitzienne sur I .
4. Soit K un espace métrique compact non vide et $f : K \rightarrow K$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \neq y$. En étudiant $x \rightarrow d(x, f(x))$, montrer que f a un unique point fixe.

Exercice 16 : Une itérée contractante

Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $f : E \rightarrow E$.

1. Montrer que $\cos$ n'est pas contractante sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose qu'une itérée f^p ($p \geq 1$) est contractante. Montrer que f a un unique point fixe ℓ .
3. Toujours sous cette hypothèse, montrer que pour tout $x_0 \in E$, la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ .
4. Montrer que $\cos \circ \cos$ est $(\sin 1)$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout réel x_0 , la suite $x_{n+1} = \cos x_n$ converge vers l'unique solution de $\cos x = x$.

Exercice 17 : Équation intégrale de Fredholm

Soit $K : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $M = \max |K|$, $g \in C([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| M < 1$.
On cherche $f \in C([0,1])$ telle que

$$\forall x \in [0,1], f(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t) f(t) dt.$$

1. Pour $f \in C([0,1])$, on note $T(f)$ le second membre. Montrer que $T(f)$ est continue.
2. Montrer que T est $|\lambda| M$ -contractante pour $\|\cdot\|_\infty$. En déduire que l'équation a une unique solution.
3. Cas particulier : $g(x) = x$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $K(x,t) = xt$. Déterminer la solution en posant $c = \int_0^1 t f(t) dt$.
4. Toujours dans ce cas, calculer les itérées $f_n = T^n(0)$ et $\|f_n - f\|_\infty$.

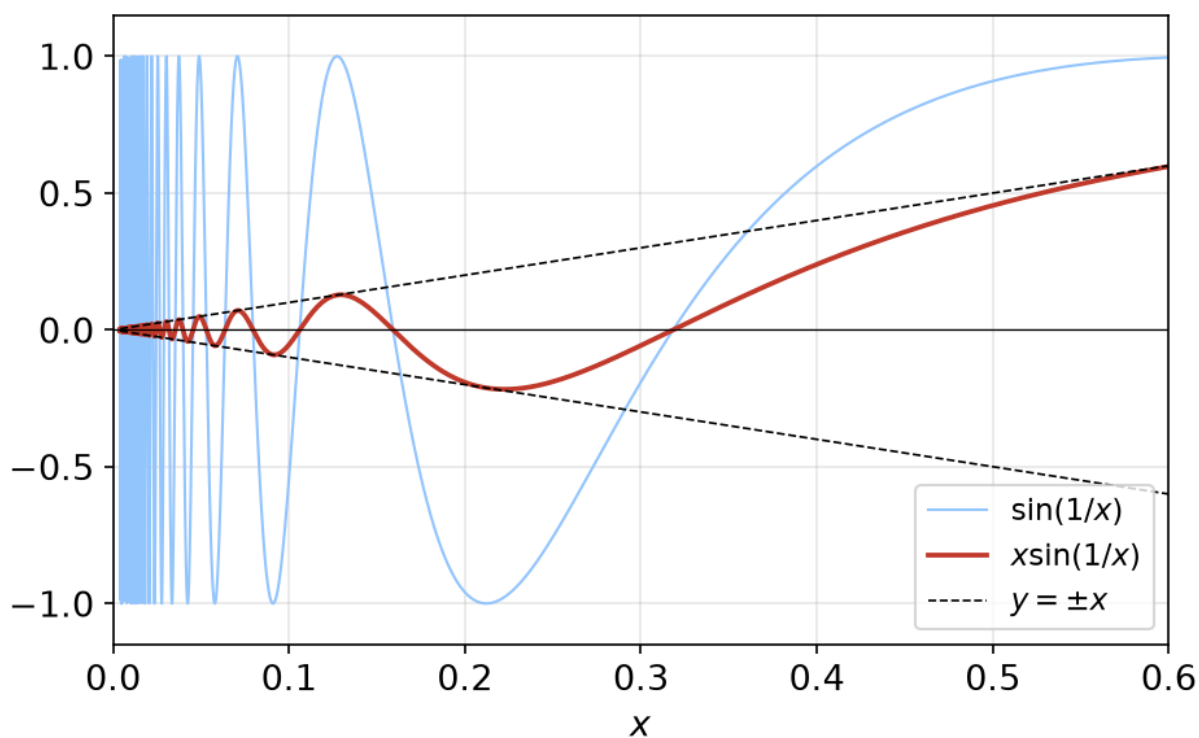
Exercice 18 : Opérateur de Picard et exponentielle

Soit $a > 0$ et $E = C([0, a])$. Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $|\Phi(f) - \Phi(g)|_\infty \leq a |f - g|_\infty$. Que peut-on conclure si $a < 1$?
2. Montrer par récurrence que $|\Phi^n(f)(x) - \Phi^n(g)(x)| \leq \frac{x^n}{n!} |f - g|_\infty$ pour $x \in [0, a]$. En déduire que Φ a un unique point fixe pour tout $a > 0$.
3. Montrer que ce point fixe est $x \rightarrow e^x$. Calculer $f_n = \Phi^n(1)$, où 1 est la fonction constante.
4. On pose $|f|_w = \sup_{x \in [0, a]} e^{-2x} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_w$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ et que Φ est $\frac{1}{2}$ -contractante pour $\|\cdot\|_w$.

Exercice 19 : Prolongement d'une fonction uniformément continue

La figure ci-dessous compare $x \rightarrow \sin(1/x)$ et $x \rightarrow x \sin(1/x)$ au voisinage de 0.



1. Soit $f :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que pour toute suite (x_n) de $]0,1]$ de limite 0, la suite $(f(x_n))$ converge, et que sa limite ne dépend pas de la suite choisie.
2. En déduire que f se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
3. Montrer que $x \rightarrow \sin(1/x)$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.
4. Montrer que $h(x) = x\sin(1/x)$ est uniformément continue sur $]0,1]$ et préciser son prolongement.

Exercice 20 : Prolongement des applications linéaires continues

Soit E un espace normé, D un sous-espace dense de E , F un espace de Banach et $u : D \rightarrow F$ linéaire telle que $|u(x)| \leq C|x|$ pour tout $x \in D$.

1. Montrer que u est uniformément continue sur D , puis qu'elle admet un unique prolongement continu $\tilde{u} : E \rightarrow F$.

2. Montrer que $\tilde{u}$ est linéaire et que $|\tilde{u}(x)| \leq C|x|$ pour tout $x \in E$.
3. Application. On note B l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{E}$ le sous-espace des fonctions en escalier et $\overline{\mathcal{E}}$ son adhérence. Montrer que l'intégrale $I : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en une forme linéaire $\tilde{I}$ sur $\overline{\mathcal{E}}$ avec $|\tilde{I}(f)| \leq \|f\|_\infty$.
4. Montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ appartient à $\overline{\mathcal{E}}$.

Exercice 21 : Problème : perturbation lipschitzienne de l'identité

Soit E un espace de Banach, $k \in [0,1[$ et $g : E \rightarrow E$ une application k -lipschitzienne. On pose $f = \text{id}_E + g$. Ce résultat est le cœur de la démonstration du théorème d'inversion locale.

1. Soit $y \in E$. Montrer que $f(x) = y$ équivaut à $x = \varphi_y(x)$, où $\varphi_y(x) = y - g(x)$. En déduire que f est bijective.
2. Montrer que $|f(x) - f(x')| \geq (1 - k)|x - x'|$. En déduire que f^{-1} est $\frac{1}{1-k}$ -lipschitzienne.
3. Montrer que f est aussi $(1+k)$ -lipschitzienne. Conclure que f est un homéomorphisme de E .
4. Application dans $\mathbb{R}$: $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ et que $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')| \leq 2|y - y'|$.
5. On résout $f(x) = 1$ par $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}\sin x_n$. On donne $x_6 \approx 0,684\,978$ et $x_7 \approx 0,683\,672$. Majorer l'erreur $|x_7 - x^*|$.
6. Application linéaire : si $A \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifie $|A| < 1$, retrouver que $\text{id}_E + A$ est bijective et que $|(\text{id}_E + A)^{-1}| \leq \frac{1}{1-|A|}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [complétude et point fixe, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre précédent : [Compacité et connexité](#)
- Chapitre suivant : [Tribus, mesures et fonctions mesurables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)