

Complétude et point fixe

I. Suites de Cauchy dans un espace métrique

Dans tout le chapitre, (E, d) désigne un espace métrique. Pour montrer qu'une suite converge, on a d'ordinaire besoin de connaître sa limite. Or, dans beaucoup de situations, cette limite est justement l'inconnue : solution d'une équation, somme d'une série, point fixe. C'est pourquoi on cherche un critère qui ne fait intervenir que les termes de la suite.

Définition :

Une suite (x_n) de E est **de Cauchy** si

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \\ &\exists N \in \mathbb{N}, \\ &\forall p, q \geq N, \\ &d(x_p, x_q) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De façon équivalente, $\sup_{p, q \geq n} d(x_p, x_q) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Autrement dit, les termes de la suite finissent par être arbitrairement proches les uns des autres. En revanche, la définition ne dit rien de la présence d'une limite dans E .

Propriété :

1. Toute suite convergente est de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ .

Démonstration :

1. Si $x_n \rightarrow \ell$, on fixe $\varepsilon > 0$ et N tel que $d(x_n, \ell) \leq \varepsilon/2$ pour $n \geq N$. Alors, par l'inégalité triangulaire, $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) \leq \varepsilon$ pour $p, q \geq N$.
2. On prend $\varepsilon = 1$ et le rang N associé. Pour $n \geq N$, on a $d(x_n, x_N) \leq 1$. Ainsi tous les termes sont dans la boule fermée de centre x_N et de rayon $\max(1, d(x_0, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N))$.
3. Soit $x_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$ et $\varepsilon > 0$. On choisit N comme dans la définition. Ensuite, on choisit $n \geq N$ tel que $d(x_{\varphi(n)}, \ell) \leq \varepsilon$; comme $\varphi(n) \geq n \geq N$, on obtient pour $p \geq N$: $d(x_p, \ell) \leq d(x_p, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) \leq 2\varepsilon$.

La réciproque du point 1 est fausse, et c'est tout l'enjeu du chapitre. Le contre-exemple fondamental vit dans $\mathbb{Q}$.

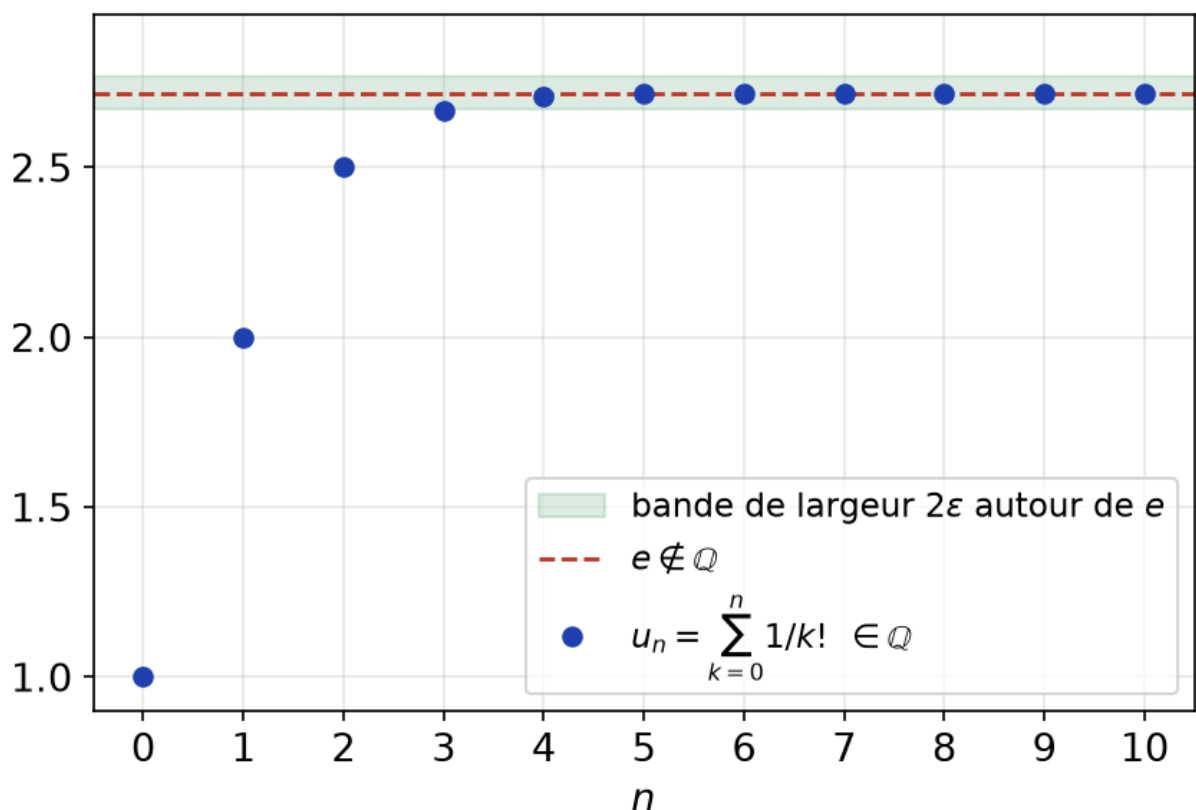
Exemple :

Posons $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, qui est un rationnel. Pour $q > p \geq 1$, on a $k! \geq 2^{k-1}$, donc

$$0 \leq u_q - u_p = \sum_{k=p+1}^q \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Par conséquent, (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Pourtant, sa limite dans $\mathbb{R}$ est e , qui est irrationnel. Elle ne converge donc pas dans $\mathbb{Q}$.

Comme le montre la figure ci-dessous, les termes u_n se resserrent dans une bande étroite autour de e , mais le « point d'arrivée » manque à $\mathbb{Q}$.



Remarque :

Le caractère de Cauchy dépend de la distance, pas seulement de la topologie. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, la distance $\delta(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ définit les mêmes suites convergentes que

$|x - y|$. Cependant, la suite (n) est de Cauchy pour δ et ne converge pas.

II. Espaces complets et espaces de Banach

1. Définitions

Définition :

Un espace métrique (E, d) est **complet** si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, complet pour la distance $d(x, y) = \|x - y\|$.

Ainsi, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En revanche, $\mathbb{R}$ est complet : c'est une forme de l'axiome de la borne supérieure. En effet, une suite de Cauchy réelle est bornée ; par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle a une valeur d'adhérence ; d'après la propriété I, elle converge. Le même argument vaut dans $\mathbb{C}$.

2. Parties complètes

Proposition :

Soit A une partie de l'espace métrique E .

1. Si A est complète (pour la distance induite), alors A est fermée dans E .

2. Si E est complet et A fermée dans E , alors A est complète.

Démonstration :

1. Soit (a_n) une suite de A qui converge vers $x \in E$. Elle est de Cauchy, donc elle converge dans A vers un a . Par unicité de la limite dans E , $x = a \in A$. Donc A est fermée.
2. Soit (a_n) de Cauchy dans A . Elle est de Cauchy dans E , donc converge vers $x \in E$. Comme A est fermée, $x \in A$.

Dans un espace complet, « complet » et « fermé » sont donc synonymes pour une partie. Cette remarque fournit la plupart des nouveaux espaces de Banach : un sous-espace fermé d'un Banach est un Banach.

3. Dimension finie

Théorème :

Tout espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace de Banach. En particulier, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets pour n'importe quelle norme.

Démonstration :

D'abord, on traite $\mathbb{K}^n$ muni de $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Si $(x^{(p)})$ est de Cauchy, chaque suite de coordonnées vérifie $|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| \leq \|x^{(p)} - x^{(q)}\|_\infty$. Elle est donc de Cauchy dans $\mathbb{K}$, qui est complet ; elle converge vers un y_i . Ensuite, la convergence coordonnée par coordonnée équivaut à la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$, donc $x^{(p)} \rightarrow y$.

Enfin, si E est de dimension n , on choisit une base. L'isomorphisme des coordonnées transporte la norme de E en une norme N sur $\mathbb{K}^n$. Or toutes les normes de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes : il existe $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha \|x\|_\infty \leq N(x) \leq \beta \|x\|_\infty$. Par conséquent, les suites de Cauchy et les suites convergentes sont les mêmes pour N et pour $\|\cdot\|_\infty$.

Corollaire :

Dans un espace vectoriel normé quelconque, tout sous-espace de dimension finie est fermé.

En effet, un tel sous-espace est complet, donc fermé d'après la proposition précédente. Par exemple, une limite uniforme sur $[0,1]$ de polynômes de degré au plus 3 est encore un polynôme de degré au plus 3.

Méthode :

Montrer qu'un espace est complet. On part d'une suite de Cauchy (x_n) et on procède en trois temps.

1. **Candidat** : on fabrique une limite possible, souvent « point par point » (coordonnée par coordonnée, ou $x \rightarrow \lim f_n(x)$) grâce à la complétude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. **Appartenance** : on vérifie que ce candidat est bien dans l'espace (borné, continu, dérivable...).

3. **Convergence en norme** : on passe à la limite $q \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$ pour obtenir $\|x_p - x\| \leq \varepsilon$ pour $p \geq N$.

Autre voie : on montre que l'espace est un fermé d'un espace déjà connu comme complet.

III. Espaces fonctionnels : complétude de $C([a,b])$

1. La norme uniforme

On note $C([a,b])$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, muni de $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$.
C'est l'exemple de base d'espace de Banach de dimension infinie.

Théorème :

L'espace $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Démonstration :

Soit (f_n) de Cauchy. On applique la méthode en trois temps.

Candidat. Pour tout x , $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty$. Ainsi $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et converge vers un nombre noté $f(x)$.

Convergence uniforme. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $p, q \geq N$. Pour x fixé et $p \geq N$, on fait tendre q vers l'infini dans $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. On obtient $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, uniformément en x .

Continuité. Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Donc $f \in C([a,b])$ et $\|f_p - f\|_\infty \rightarrow 0$.

La même preuve montre que l'espace $B(X, F)$ des applications bornées d'un ensemble X dans un Banach F , muni de la norme uniforme, est un Banach. De même, l'espace ℓ^∞ des suites bornées est

complet.

2. Des espaces normés non complets

La complétude dépend fortement de la norme choisie. En dimension infinie, deux normes ne sont pas toujours équivalentes. Par conséquent, un même espace peut être complet pour une norme et non complet pour une autre.

Exemple :

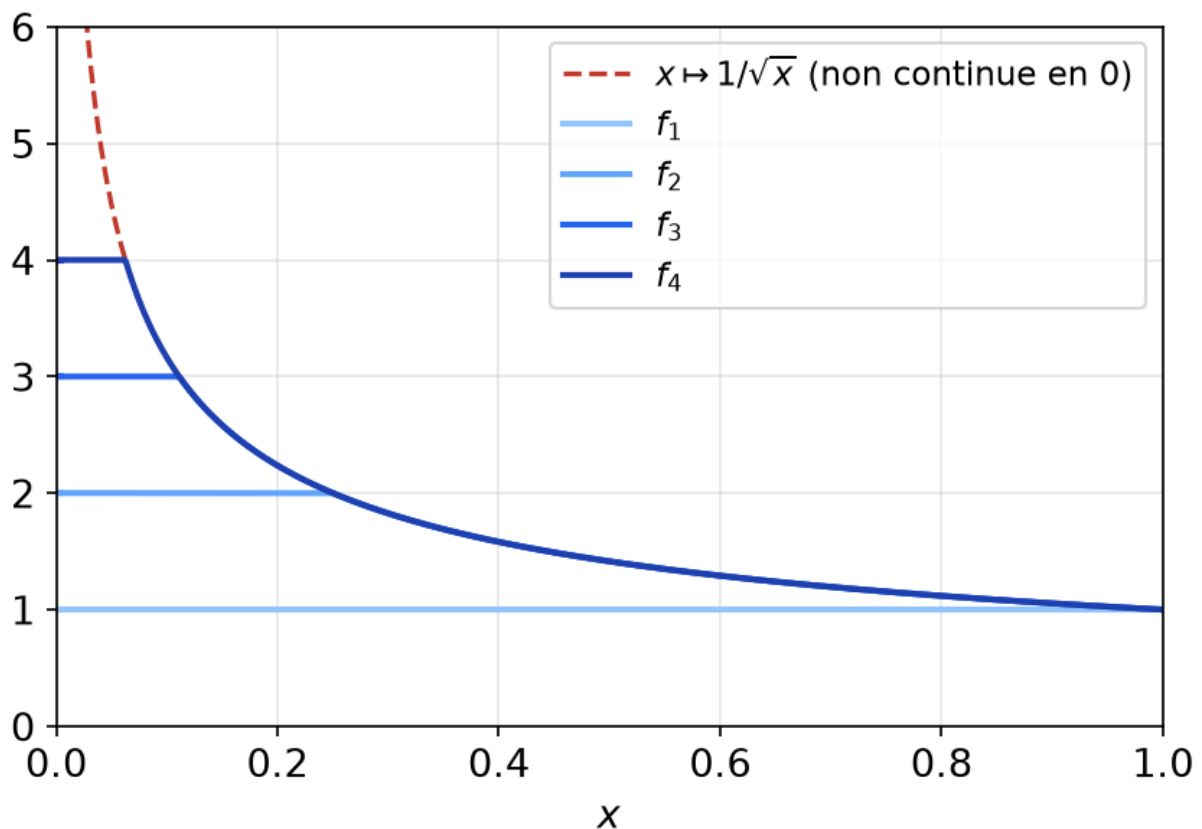
Munissons $C([0,1])$ de $|f|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et posons $f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ pour $x > 0$, $f_n(0) = n$. Chaque f_n est continue. Pour $q \geq p \geq 1$, les fonctions f_p et f_q coïncident sur $[1/p^2, 1]$, donc

$$|f_q - f_p|_1 \leq \int_0^{1/p^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{p}.$$

La suite est donc de Cauchy. Supposons qu'elle converge vers f continue. Pour $c \in]0,1]$ et

$n \geq 1/\sqrt{c}$, on a $\int_c^1 |f(t) - t^{-1/2}| dt \leq |f - f_n|_1$. Ainsi l'intégrale est nulle et $f(t) = 1/\sqrt{t}$ sur $[c,1]$ pour tout c . Or cette fonction n'est pas bornée sur $]0,1]$, ce qui contredit la continuité de f sur le segment.

Comme le montre la figure ci-dessous, les fonctions f_n sont des « troncatures » de plus en plus hautes de $1/\sqrt{x}$. L'aire qui les sépare tend vers 0, mais leur limite naturelle sort de l'espace.



Méthode :

Exhiber un espace normé non complet. On repère une « limite naturelle » qui sort de l'espace : fonction discontinue, polynôme de degré infini, suite à support infini.

1. On construit une suite de l'espace qui approche cette limite, et on montre qu'elle est de Cauchy (souvent par une majoration explicite de $\|x_q - x_p\|$).
2. On suppose qu'elle converge vers un x de l'espace. Ensuite, on identifie x par une information partielle continue pour la norme (valeurs sur un sous-intervalle, coefficients, coordonnées).
3. On aboutit à une contradiction. Variante : on montre que l'espace n'est pas fermé dans un Banach plus gros.

Exemple :

L'espace $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $|P| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ n'est pas complet. En effet, les polynômes $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ convergent uniformément sur $[0,1]$ vers $\exp$, qui n'est pas un polynôme. Autrement dit, les fonctions polynomiales ne forment pas un fermé de $C([0,1])$.

IV. Séries dans un espace de Banach

1. Convergence absolue

Dans un espace normé, une série $\sum x_n$ converge si la suite des sommes partielles

$S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ converge. On dit qu'elle est **absolument convergente** si la série réelle $\sum |x_n|$ converge.

Théorème :

Dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente, et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

Réciproquement, un espace normé dans lequel toute série absolument convergente converge est un espace de Banach.

Démonstration :

Sens direct. Pour $q > p$, l'inégalité triangulaire donne

$$|S_q - S_p| \leq \sum_{k=p+1}^q |x_k| \leq \sum_{k>p} |x_k|. \text{ Ce reste tend vers } 0, \text{ donc } (S_n) \text{ est de Cauchy,}$$

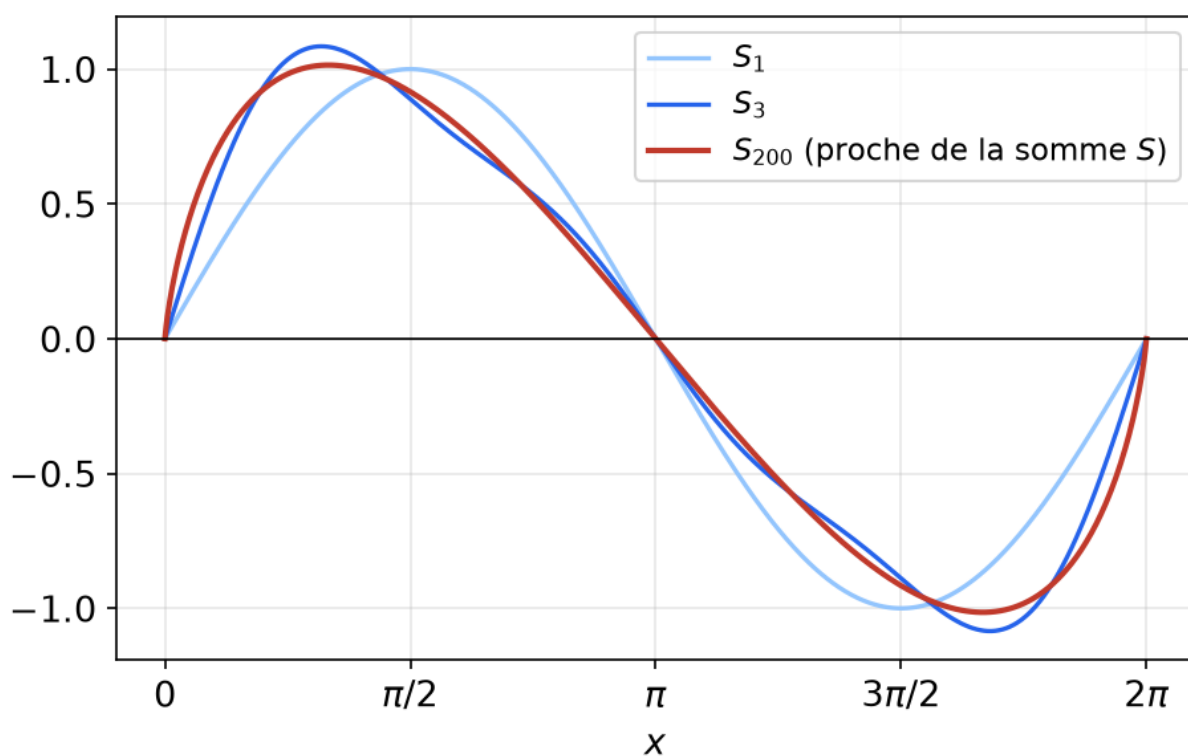
puis converge. L'inégalité s'obtient en passant à la limite dans $|S_n| \leq \sum_{k \leq n} |x_k|$, la norme étant continue.

Réciproque. Soit (y_n) de Cauchy. On construit φ strictement croissante avec

$|y_p - y_q| \leq 2^{-k}$ pour $p, q \geq \varphi(k)$. Alors la série $\sum (y_{\varphi(k+1)} - y_{\varphi(k)})$ est absolument convergente, donc convergente. Ses sommes partielles valent $y_{\varphi(k+1)} - y_{\varphi(0)}$. Ainsi la suite extraite converge et, par la propriété I, (y_n) converge.

Ce critère est souvent le moyen le plus rapide de construire un élément d'un Banach. Par exemple, dans

$C([0, 2\pi])$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ vérifie $\left\| \frac{\sin(k \cdot)}{k^2} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{k^2}$. Elle converge donc absolument, et sa somme S est une fonction continue. Comme le montre la figure ci-dessous, les sommes partielles se stabilisent rapidement.



2. Séries de Neumann et exponentielle

Si E est un Banach, l'espace $\mathcal{L}_c(E)$ des endomorphismes continus, muni de la norme d'opérateur, est aussi un Banach. De plus, cette norme vérifie $\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$.

Proposition :

Soit E un Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ avec $\|u\| < 1$. Alors $\text{id} - u$ est inversible, d'inverse continu

$$(\text{id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n, \quad \|(\text{id} - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u\|}.$$

Démonstration :

On a $|u^n| \leq |u|^n$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série $\sum u^n$ converge absolument dans le Banach $\mathcal{L}_c(E)$; notons v sa somme. Ensuite,

$(\text{id} - u) \circ \sum_{k=0}^n u^k = \text{id} - u^{n+1}$, qui tend vers id . Par continuité de la composition, $(\text{id} - u) \circ v = \text{id}$, et de même $v \circ (\text{id} - u) = \text{id}$. La majoration découle du théorème.

De la même façon, pour une matrice A , la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge absolument dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui définit $\exp(A)$. On retrouvera ces séries dans l'étude des équations différentielles linéaires.

V. Le théorème du point fixe de Banach-Picard

1. Applications contractantes

Définition :

Une application $f : E \rightarrow E$ est **contractante** s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

On dit aussi que f est k -lipschitzienne avec $k < 1$, et k est une constante de contraction.

Pour une fonction dérivable sur un intervalle I , l'inégalité des accroissements finis fournit le critère pratique : si $|f'| \leq k < 1$ sur I et $f(I) \subset I$, alors f est contractante de I dans I . Attention, la condition plus faible $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ ne suffit pas.

Théorème :

Théorème du point fixe de Banach-Picard. Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $f : E \rightarrow E$ contractante de constante k . Alors :

1. f possède un unique point fixe ℓ ;
2. pour tout $x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ ;
3. on dispose des estimations d'erreur

$$d(x_n, \ell) \leq k^n d(x_0, \ell), \quad d(x_n, \ell) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1), \quad d(x_n, \ell) \leq \frac{k}{1-k} d(x_{n-1}, x_n).$$

Démonstration :

Unicité. Si ℓ et ℓ' sont fixes, $d(\ell, \ell') = d(f(\ell), f(\ell')) \leq k d(\ell, \ell')$. Comme $k < 1$, on obtient $d(\ell, \ell') = 0$.

Suite de Cauchy. Par récurrence, $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. Donc, pour $q > p$,

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{j=p}^{q-1} k^j d(x_0, x_1) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Ce majorant tend vers 0 : la suite est de Cauchy, donc elle converge vers un $\ell \in E$ car E est complet.

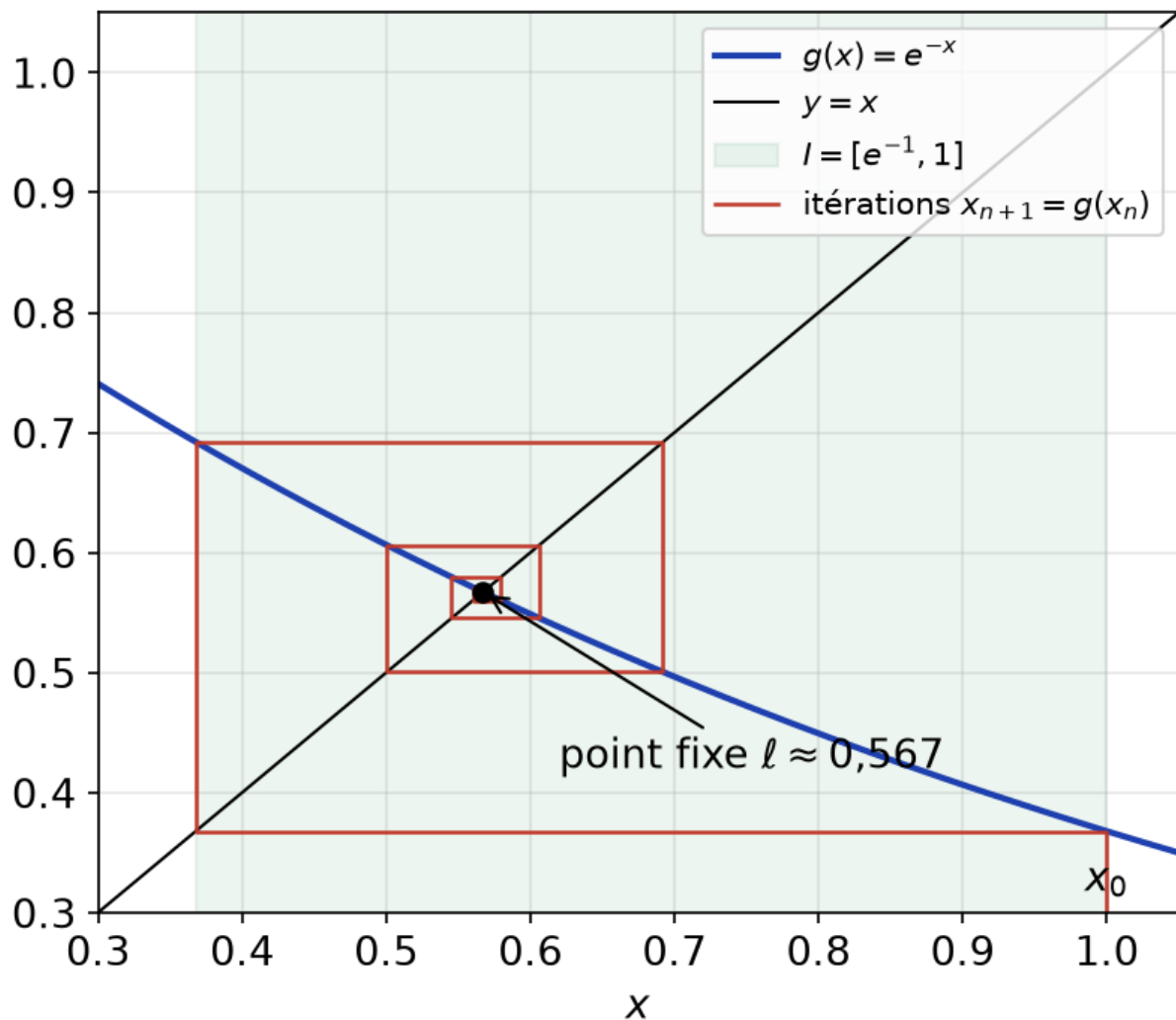
Point fixe. L'application f est lipschitzienne, donc continue. En passant à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$.

Erreurs. La première vient de $d(x_n, \ell) = d(f(x_{n-1}), f(\ell)) \leq k d(x_{n-1}, \ell)$. La deuxième s'obtient en faisant $q \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus. Enfin, la troisième applique la deuxième à la suite qui part de x_{n-1} .

Exemple :

Réolvons $x = e^{-x}$. Sur $I = [e^{-1}, 1]$, fermé de $\mathbb{R}$ donc complet, la fonction $g(x) = e^{-x}$ est décroissante. Ainsi $g(I) = [e^{-1}, e^{-1/e}]$, et $e^{-1/e} \approx 0,692$: l'intervalle est stable. De plus, $|g'(x)| = e^{-x} \leq e^{-1/e} = k \approx 0,692$ sur I . Par conséquent, l'équation a une unique solution $\ell \approx 0,567$ dans I , limite des itérées depuis $x_0 = 1$.

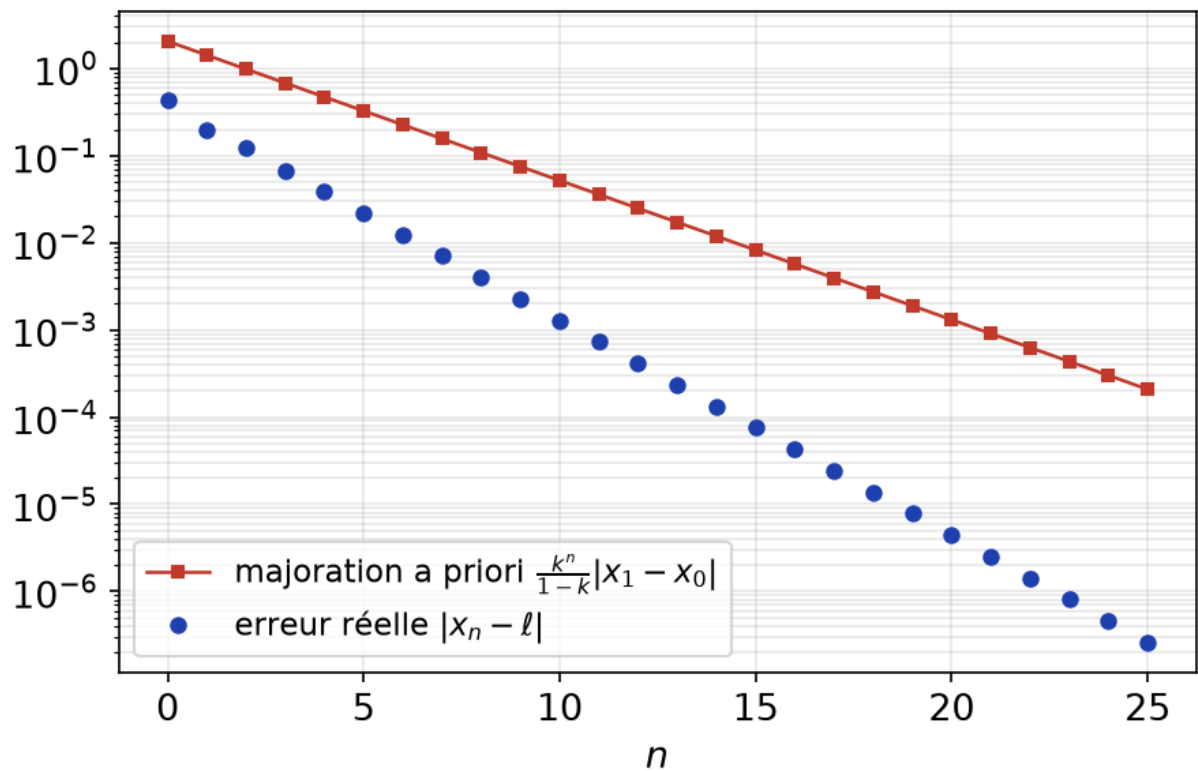
La construction graphique des itérées, dite en « toile d'araignée », est représentée ci-dessous. Chaque aller-retour entre la courbe et la diagonale fait un pas $x_n \rightarrow x_{n+1}$.



2. Vitesse de convergence et arrêt de l'algorithme

La convergence est au moins **géométrique** de raison k . La majoration a priori $\frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$ donne à l'avance un nombre d'itérations suffisant. Ainsi, pour garantir une erreur inférieure à ε , il suffit que $n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1-k) / d(x_0, x_1))}{\ln k}$. En revanche, la majoration a posteriori $\frac{k}{1-k} d(x_{n-1}, x_n)$ sert de test d'arrêt pendant le calcul.

Comme le montre la figure ci-dessous, sur l'exemple précédent, la majoration a priori est pessimiste. En effet, la vraie raison est proche de $|g'(l)| = l \approx 0.567$, plus petite que k .



Méthode :

Appliquer le théorème du point fixe.

1. Écrire le problème sous la forme $x = f(x)$: équation numérique, système, équation intégrale.
2. Choisir un espace complet F : un fermé de $\mathbb{R}^n$, un fermé de $C([a,b])$... et vérifier que $f(F) \subset F$.
3. Établir $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ avec $k < 1$: accroissements finis, majoration d'intégrale, choix d'une norme adaptée.
4. Conclure (existence, unicité, convergence) et estimer l'erreur.

3. Variantes utiles

Corollaire :

Soit E complet et $f : E \rightarrow E$ telle qu'une itérée f^p soit contractante. Alors f a un unique point fixe, et toute suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers lui.

En effet, le point fixe ℓ de f^p vérifie $f^p(f(\ell)) = f(f^p(\ell)) = f(\ell)$. Donc $f(\ell)$ est aussi fixe par f^p , et l'unicité donne $f(\ell) = \ell$. Ce corollaire est la clé du théorème de Cauchy-Lipschitz global : l'opérateur de Picard n'est pas toujours contractant, mais ses itérées le deviennent.

Attention :

Aucune hypothèse n'est superflue. Sur $]0,1]$, non complet, $x \rightarrow x/2$ est contractante sans point fixe. Sur $[1, +\infty[$, $x \rightarrow x + 1/x$ vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$ sans avoir de point fixe. Enfin, une translation de $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne sans point fixe.

VI. Prolongement des applications uniformément continues

La complétude permet aussi de prolonger des applications définies seulement sur une partie dense. C'est ainsi qu'on étend une fonction de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, ou une intégrale des fonctions en escalier à une classe plus large.

Théorème :

Soit E un espace métrique, D une partie dense de E , F un espace métrique **complet** et $f : D \rightarrow F$ uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $\tilde{f} : E \rightarrow F$ qui prolonge f . De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.

Démonstration :

Unicité. Deux prolongements continus coïncident sur D , dense ; ils sont donc égaux.

Construction. Soit $x \in E$ et (a_n) une suite de D de limite x . Elle est de Cauchy. Or l'uniforme continuité transforme une suite de Cauchy en suite de Cauchy : si $d(a,b) \leq \eta$ implique $d(f(a), f(b)) \leq \varepsilon$, il suffit de prendre p, q assez grands pour que $d(a_p, a_q) \leq \eta$. Ainsi $(f(a_n))$ converge dans F complet.

Indépendance. Si (b_n) est une autre suite de D de limite x , la suite mélangée $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots$ tend vers x . D'après ce qui précède, son image converge. Par conséquent, $\lim f(a_n) = \lim f(b_n)$, que l'on note $\tilde{f}(x)$. Pour $x \in D$, la suite constante donne $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Uniforme continuité. Soit ε, η comme ci-dessus et $x, y \in E$ avec $d(x, y) < \eta$. On approche x et y par $a_n, b_n \in D$; pour n grand, $d(a_n, b_n) < \eta$, donc $d(f(a_n), f(b_n)) \leq \varepsilon$. En passant à la limite, $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$.

Exemple :

La fonction $x \rightarrow \sin(1/x)$ est continue sur $]0,1]$, dense dans $[0,1]$. Pourtant, elle n'a aucun prolongement continu en 0 : elle n'est pas uniformément continue. En revanche, $x \rightarrow x \sin(1/x)$ se prolonge par 0 . Enfin, toute application linéaire continue d'un sous-espace dense vers un Banach se prolonge en une application linéaire continue de même norme.

Ce théorème prépare aussi la suite du cours. Par exemple, l'intégrale, définie sur les fonctions en escalier et 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$ sur $[0,1]$, se prolonge à leur adhérence, qui contient les fonctions continues.

Ce qu'il faut retenir

- Une suite convergente est de Cauchy ; la réciproque définit les espaces complets. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ le sont.
- Une partie complète est fermée ; dans un complet, un fermé est complet.
- Tout espace normé de dimension finie est un Banach ; tout sous-espace de dimension finie est fermé.
- $C([a,b])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un Banach ; muni de $\|\cdot\|_1$, il ne l'est pas.
- Pour prouver la complétude : candidat point par point, appartenance à l'espace, passage à la limite dans le critère de Cauchy.
- Un espace normé est un Banach si et seulement si toute série absolument convergente y converge.
- Si $\|u\| < 1$ dans $\mathcal{L}_c(E)$, alors $\text{id} - u$ est inversible d'inverse $\sum u^n$.
- Banach-Picard : une contraction d'un complet non vide a un unique point fixe, limite de toute suite itérée, avec l'erreur $d(x_n, \ell) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.
- Il suffit qu'une itérée f^p soit contractante ; la condition $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ ne suffit pas.
- Une application uniformément continue sur une partie dense, à valeurs dans un complet, se prolonge de façon unique par continuité.

Questions fréquentes sur complétude et point fixe

Quelle différence entre une suite de Cauchy et une suite convergente ?

Une suite convergente est toujours de Cauchy. La réciproque n'est vraie que dans un espace complet : dans $\mathbb{Q}$, les sommes partielles de $\sum 1/k!$ forment une suite de Cauchy sans limite rationnelle. Le critère de Cauchy a l'avantage de ne pas faire intervenir la limite.

Comment montrer qu'un espace normé n'est pas complet ?

On cherche une limite naturelle qui sort de l'espace : fonction discontinue, polynôme de degré infini, suite à support infini. On construit une suite de l'espace qui l'approche, on montre qu'elle est de Cauchy, puis on prouve par l'absurde qu'aucun élément de l'espace n'en est la limite. Par exemple, $C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Une application qui vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ a-t-elle toujours un point fixe ?

Non. La fonction $x \rightarrow x + 1/x$ sur $[1, +\infty[$ vérifie cette inégalité stricte sans avoir de point fixe. Le théorème de Banach-Picard exige une constante $k < 1$ uniforme. En revanche, sur un compact, l'inégalité stricte suffit.

Pourquoi le point fixe de Banach est-il si important en L3 ?

Il donne à la fois l'existence, l'unicité et un algorithme de calcul avec une erreur contrôlée

$d(x_n, \ell) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$. Il sert à démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz, via l'opérateur de Picard, et le théorème d'inversion locale. Il permet aussi de résoudre des équations intégrales.

Pour aller plus loin en L3

- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur complétude et point fixe](#)
- À maîtriser avant : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre précédent : [Compacité et connexité](#)
- Chapitre suivant : [Tribus, mesures et fonctions mesurables](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)