

Compacité et connexité par arcs

Exercice 1 : Compacité par la définition séquentielle

On travaille dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. On pose $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

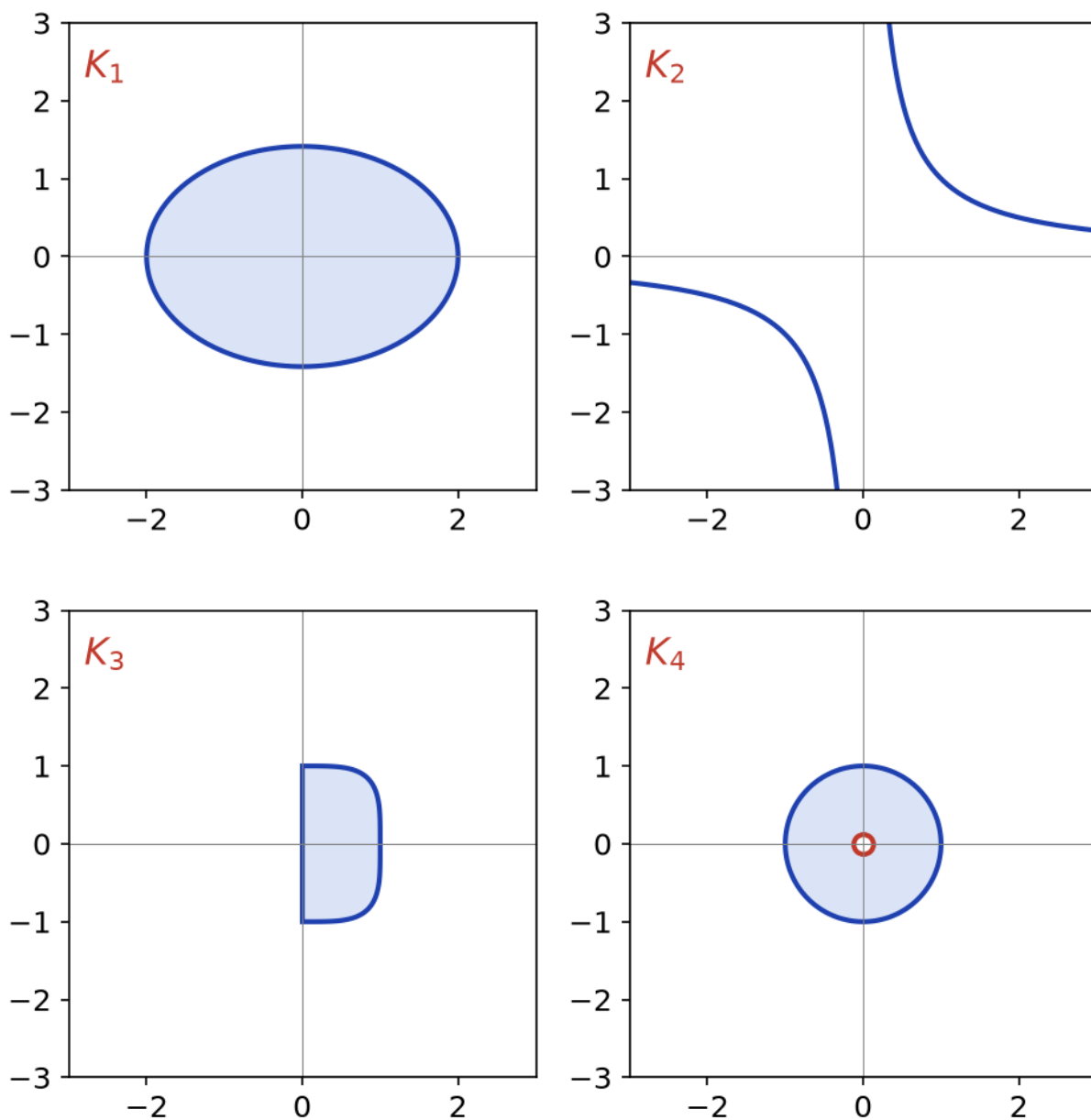
1. Montrer, en revenant à la définition séquentielle, que A est compacte.
2. Montrer que B n'est pas compacte.
3. Montrer que $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ n'est pas compacte.

Exercice 2 : Parties compactes du plan

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme N_∞ . Pour chacune des parties suivantes, dire si elle est compacte, en justifiant la réponse.

1. $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 4\}$.
2. $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$.
3. $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$.
4. $K_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ est compact.

La figure ci-dessous représente les quatre premières parties.



Exercice 3 : Distance à un compact et à un fermé

Soit E un espace vectoriel normé et $x \in E$.

1. Soit K une partie compacte non vide de E . Montrer qu'il existe $y_0 \in K$ tel que

$$d(x, K) = |x - y_0|.$$

2. On suppose E de dimension finie. Soit F une partie fermée non vide de E . Montrer que $d(x, F)$ est atteinte. On pourra fixer $a \in F$ et considérer $F \cap B_f(x, |x - a|)$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, calculer la distance de l'origine à $F = \{(x, y) : xy = 1\}$ et préciser les points où elle est atteinte.

Exercice 4 : Le groupe orthogonal est compact

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $|M| = \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 \right)^{1/2}$.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$ est compact.
3. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
4. Justifier sans calcul que $M \rightarrow \text{tr}(M)$ admet un maximum et un minimum sur $O_n(\mathbb{R})$, puis les déterminer.

Exercice 5 : Théorème de Heine et continuité uniforme

1. Montrer que $x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais n'y est pas lipschitzienne.
2. Montrer que $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On pourra considérer $x_n = n + 1/n$ et $y_n = n$.
3. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
4. En déduire que $x \rightarrow x e^{-x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6 : Un maximum obtenu par compacité

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy e^{-(x^2 + y^2)}$. On note $r^2 = x^2 + y^2$.

1. Montrer que $|f(x, y)| \leq \frac{r^2}{2} e^{-r^2}$ pour tout (x, y) .
2. Montrer que $|f(x, y)| < e^{-2}$ dès que $r \geq 2$. On admettra que $t \rightarrow t e^{-t}$ décroît sur $[1, +\infty[$.
3. En déduire, par un argument de compacité, que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer ce maximum et les points où il est atteint. En déduire le minimum de f .

Exercice 7 : Point fixe d'une application strictement contractante

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé et $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall x, y \in K, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

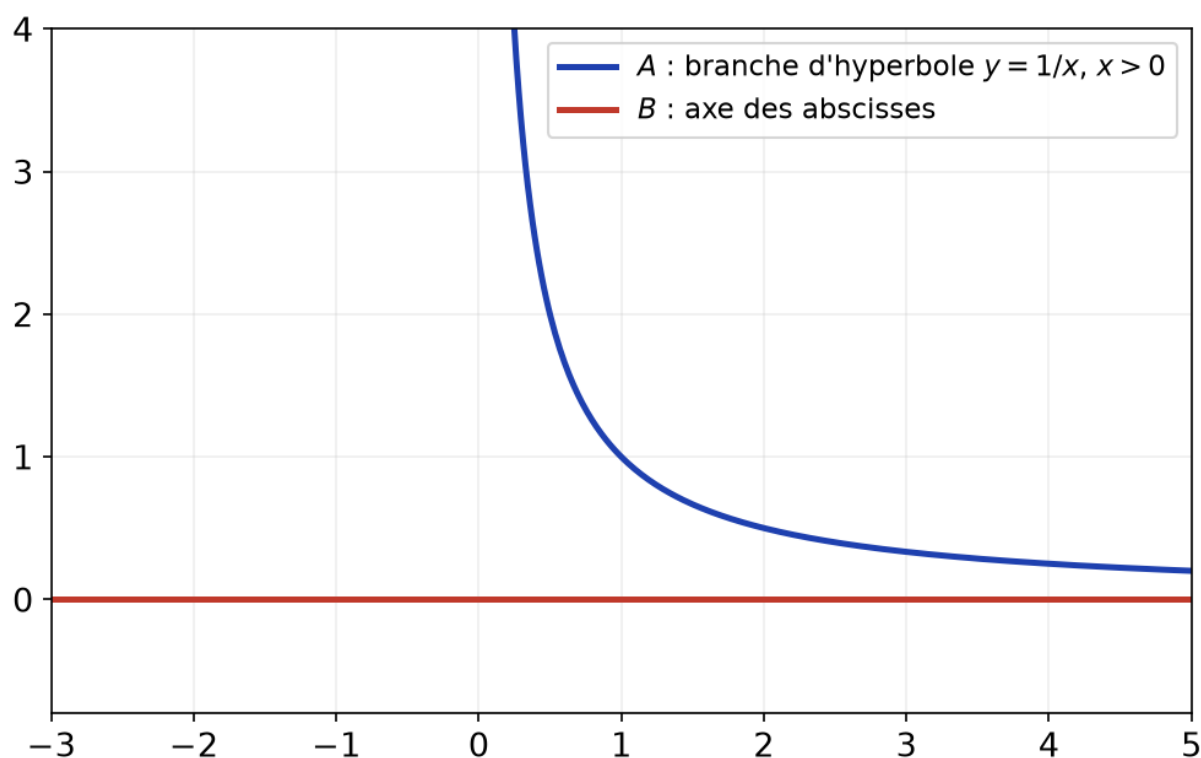
1. Montrer que f est continue.
2. En étudiant $g(x) = |f(x) - x|$, montrer que f admet un point fixe, et qu'il est unique.
3. Soit $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $|h(x) - h(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$, mais que h n'a pas de point fixe. Quelle hypothèse manque ?
4. Soit a le point fixe de f , $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers a . On pourra étudier la suite $d_n = |u_n - a|$ et une valeur d'adhérence de (u_n) .

Exercice 8 : Somme de deux parties

Pour deux parties A, B d'un espace normé E , on note $A + B = \left\{ a + b ; \begin{matrix} a \in A, \\ b \in B \end{matrix} \right\}$.

1. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est compacte et B fermée, alors $A + B$ est fermée.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $A = \{(x, 1/x) : x > 0\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$. Montrer que A et B sont fermées, puis déterminer $A + B$. Conclure.

Les deux parties de la question 3 sont représentées ci-dessous.



Exercice 9 : Parties connexes par arcs du plan

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est connexe par arcs, en l'écrivant comme image de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par une application continue.
2. Soit $n \geq 2$ et S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ euclidien. Soient $a, b \in S$ avec $b \neq -a$. Montrer que $\gamma(t) = \frac{(1-t)a + tb}{|(1-t)a + tb|}$ définit un chemin de a à b dans S . En déduire que S est connexe par arcs.
3. Montrer que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ est étoilée mais non convexe.
4. Montrer que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 10 : Fonctions continues sur une partie connexe par arcs

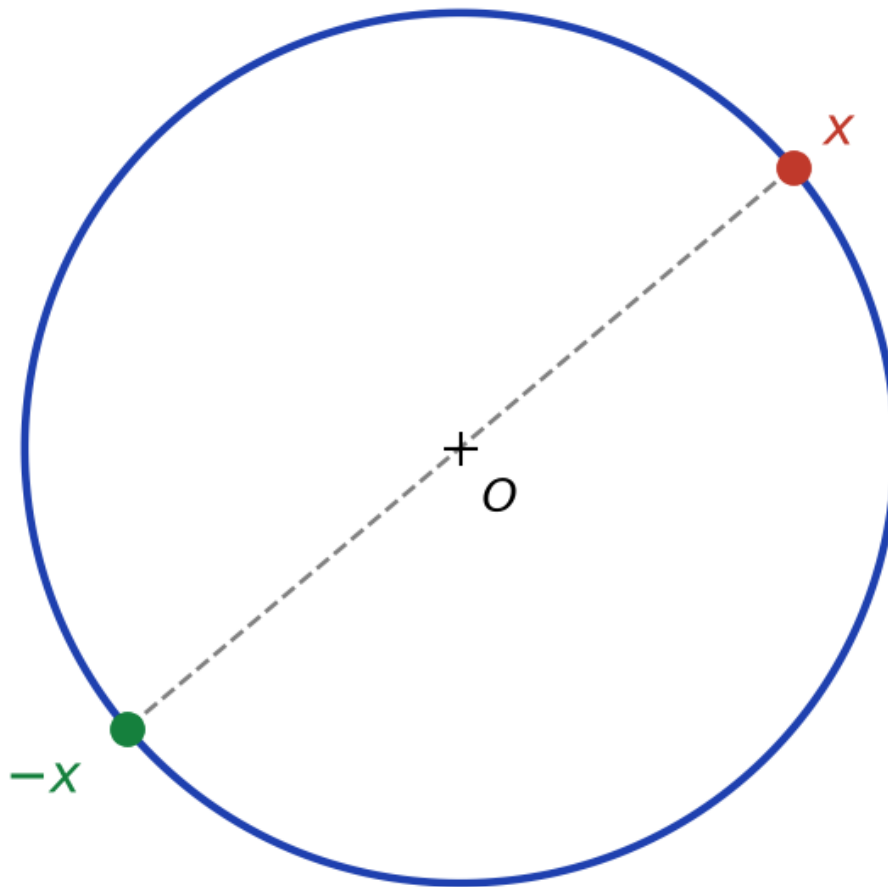
Soit A une partie connexe par arcs d'un espace normé.

1. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.
2. Soient $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f^2 = g^2$ et que g ne s'annule pas. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune application continue et injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On pourra retirer à $\mathbb{R}^2$ un point bien choisi.

Exercice 11 : Deux points antipodaux de même image

Soit S le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Deux points x et $-x$ de S sont dits antipodaux, comme sur la figure ci-dessous.

cercle unité $\mathcal{S}$



1. Montrer que $\mathcal{S}$ est connexe par arcs.
2. On pose $g(x) = f(x) - f(-x)$. Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{S}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
3. En déduire qu'aucune application continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ n'est injective.
4. Interpréter le résultat en termes de températures le long de l'équateur terrestre.

Exercice 12 : Comparaison des normes usuelles

Sur $\mathbb{R}^n$, on note $N_1(x) = \sum |x_i|$, $N_2(x) = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$ et $N_\infty(x) = \max |x_i|$.

1. Montrer que $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$, que $N_1 \leq \sqrt{n} N_2$ et que $N_2 \leq \sqrt{n} N_\infty$.
2. Montrer que ces quatre constantes sont optimales.
3. Sur $\mathbb{R}[X]$, on note $N_1(P) = \sum_k |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_k |a_k|$ si $P = \sum_k a_k X^k$.
Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.
4. Donner une suite de polynômes qui converge vers 0 pour N_∞ mais pas pour N_1 .

Exercice 13 : Normes sur les polynômes de degré au plus n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer qu'il existe $C_n > 0$ tel que $N(P') \leq C_n N(P)$ pour tout $P \in E$.
3. Montrer que $C_n \geq n$.
4. Soit (P_k) une suite de E qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f .
Montrer que f est la restriction à $[0,1]$ d'un polynôme $P \in E$.
5. Montrer alors que $P_k(x) \rightarrow P(x)$ pour tout réel x , même hors de $[0,1]$.

Exercice 14 : Continuité du déterminant et parties de $M_n(K)$

On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque.

1. Justifier la continuité de $\det$, de tr , de $A \rightarrow A^T$, de $A \rightarrow A^k$ et de $(A, B) \rightarrow AB$.
2. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert et que $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ est fermé.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes est fermé. On admettra qu'une matrice A est nilpotente si et seulement si $A^n = 0$.
4. Montrer que, pour $0 \leq r \leq n$, l'ensemble des matrices de rang au plus r est fermé.
5. Montrer que $A \rightarrow A^{-1}$ est continue sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15 : Densité de GL_n et polynôme caractéristique de AB

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A - \frac{1}{p} I_n$ est inversible pour p assez grand. En déduire que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. En déduire, par continuité, que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que AB et BA ne sont pas toujours semblables.

Exercice 16 : Connexité par arcs de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$

Soient $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. On pose $P(z) = \det((1-z)A + zB)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que P est un polynôme non nul. En déduire que son ensemble Z de racines est fini et ne contient ni 0 ni 1.
2. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_s(t) = t + i s t(1-t)$, $t \in [0, 1]$. Montrer que deux arcs γ_s et $\gamma_{s'}$ avec $s \neq s'$ n'ont en commun que les points 0 et 1. En déduire qu'un des arcs

γ_s évite Z .

3. Conclure que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
4. Expliciter un chemin de I_2 à $-I_2$ dans $GL_2(\mathbb{C})$. Pourquoi ce chemin ne peut-il pas rester dans $GL_2(\mathbb{R})$ lorsque l'on remplace $-I_2$ par $\text{diag}(-1, 1)$?

Exercice 17 : Composantes connexes par arcs des projecteurs

Soit $n \geq 2$ et $\mathcal{P} = \{P \in M_n(\mathbb{C}) : P^2 = P\}$. Pour $0 \leq r \leq n$, on note $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ de rang r , et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est fermé, mais n'est pas borné.
2. Montrer que $\text{rg}(P) = \text{tr}(P)$ pour tout $P \in \mathcal{P}$.
3. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ un chemin. Montrer que $\text{rg}(\gamma(t))$ ne dépend pas de t .
4. Montrer que $\mathcal{P}_r = \{Q J_r Q^{-1} : Q \in GL_n(\mathbb{C})\}$, puis que $\mathcal{P}_r$ est connexe par arcs. On admettra que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
5. Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathcal{P}$. Lesquelles sont compactes ?

Exercice 18 : Meilleure approximation polynomiale

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_\infty = \sup_{[0, 1]} |f|$, et $F = \mathbb{R}_n[X]$, vu comme sous-espace de E .

1. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $P^* \in F$ tel que $\|f - P^*\|_\infty = d(f, F)$. On pourra introduire $K = \{P \in F : \|P\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty\}$.

2. Cas $n = 0$ et $f(x) = x^2$: déterminer la meilleure approximation de f par une constante et la distance $d(f, \mathbb{R}_0[X])$.
3. Cas $n = 1$ et $f(x) = x^2$. Pour $P(x) = ax + b$, on pose $e = f - P$. Calculer $e(0) - 2e(1/2) + e(1)$. En déduire que $|f - P|_\infty \geq 1/8$.
4. Montrer que $P^*(x) = x - 1/8$ réalise la distance, et donner $d(f, \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 19 : Problème : adhérence et intérieur des matrices diagonalisables

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\Delta(A) = \text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)$, discriminant de $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$.

1. Montrer que Δ est continue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\Delta(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{D}$.
3. Montrer que $U = \{A : \Delta(A) > 0\}$ est un ouvert inclus dans $\mathcal{D}$.
4. Soit A telle que $\Delta(A) = 0$. Montrer que $A \in \mathcal{D}$ si et seulement si A est une matrice scalaire λI_2 .
5. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{D}$ est $\{A : \Delta(A) \geq 0\}$. On pourra trigonaliser une matrice telle que $\Delta(A) = 0$.
6. Montrer que l'intérieur de $\mathcal{D}$ est U .
7. La partie $\mathcal{D}$ est-elle ouverte ? fermée ? Montrer qu'elle est connexe par arcs.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [compacité et connexité par arcs, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Topologie d'un espace normé et continuité](#)
- Chapitre précédent : [Topologie d'un espace normé et continuité](#)
- Chapitre suivant : [Séries numériques et vectorielles](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)