

## Compacité et connexité par arcs

### Corrigé de l'exercice 1 : Compacité par la définition séquentielle

1. Soit  $(u_k)$  une suite d'éléments de  $A$ . Deux cas se présentent. D'abord, si une valeur de  $A$  est prise une infinité de fois, la sous-suite constante correspondante converge vers cette valeur, qui est dans  $A$ . Sinon, chaque valeur n'est prise qu'un nombre fini de fois. Pour tout  $N$ , il n'y a alors qu'un nombre fini d'indices  $k$  tels que  $u_k \geq 1/N$ , car  $A \cap [1/N, 1]$  est fini. On construit donc par récurrence  $\varphi(k) > \varphi(k-1)$  tel que  $u_{\varphi(k)} < 1/k$ . Ainsi  $0 \leq u_{\varphi(k)} < 1/k$ , et la sous-suite converge vers  $0 \in A$ . **Toute suite de  $A$  a une valeur d'adhérence dans  $A$  :  $A$  est compacte.**
2. La suite  $(1/n)$  est à valeurs dans  $B$  et converge vers  $0$ . Par conséquent, toutes ses sous-suites convergent vers  $0$ , qui n'appartient pas à  $B$ . **Aucune sous-suite ne converge dans  $B$  :  $B$  n'est pas compacte.**
3. Soit  $q_n$  la troncature décimale à  $10^{-n}$  près de  $\sqrt{2}/2$ . C'est un rationnel de  $[0, 1]$ , et  $q_n \rightarrow \sqrt{2}/2$ . Toute sous-suite converge vers  $\sqrt{2}/2$ , qui est irrationnel. **Donc  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  n'est pas fermée, donc pas compacte.**

### Corrigé de l'exercice 2 : Parties compactes du plan

On est en dimension finie : une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

1. L'application  $(x, y) \rightarrow x^2 + 2y^2$  est polynomiale, donc continue. Ainsi  $K_1$  est l'image réciproque du fermé  $] -\infty, 4]$  : elle est fermée. De plus, sur  $K_1$ , on a  $x^2 \leq 4$  et  $y^2 \leq 2$ .

Donc  $N_\infty(x, y) \leq 2$ .  $K_1$  est compact.

2. La partie  $K_2$  est fermée, comme image réciproque de  $\{1\}$  par  $(x, y) \rightarrow xy$ . Cependant, elle contient  $(n, 1/n)$  pour tout  $n \geq 1$ , et  $N_\infty(n, 1/n) = n$ .  $K_2$  n'est pas bornée, donc n'est pas compact.

3. D'abord,  $K_3$  est l'intersection des fermés  $\{x^4 + y^4 \leq 1\}$  et  $\{x \geq 0\}$ , images réciproques de fermés par des fonctions continues. Ensuite,  $x^4 \leq 1$  et  $y^4 \leq 1$  donnent  $N_\infty(x, y) \leq 1$ .  $K_3$  est compact.

4. La suite  $(1/n, 0)$  est dans  $K_4$  et converge vers  $(0, 0)$ , qui n'est pas dans  $K_4$ .  $K_4$  n'est pas fermée, donc n'est pas compact.

5. L'application  $\psi: x \rightarrow (x, f(x))$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^2$ , car ses deux coordonnées le sont. Or  $[0, 1]$  est compact. Donc  $\Gamma_f = \psi([0, 1])$  est compact, comme image continue d'un compact.

**Point de méthode :** pour un ensemble défini par des inégalités larges entre fonctions continues, le caractère fermé est immédiat ; tout l'effort porte sur la majoration.

### Corrigé de l'exercice 3 : Distance à un compact et à un fermé

---

1. L'application  $\delta: y \rightarrow |x - y|$  vérifie  $|\delta(y) - \delta(z)| \leq |y - z|$  par l'inégalité triangulaire renversée. Elle est donc 1-lipschitzienne, donc continue. Par le théorème des bornes atteintes sur le compact non vide  $K$ , elle atteint son minimum en un point  $y_0$ . Ainsi

$$d(x, K) = |x - y_0| \text{ avec } y_0 \in K.$$

2. Soit  $a \in F$  et  $r = |x - a|$ . On pose  $K = F \cap B_f(x, r)$ . C'est une partie fermée, comme intersection de deux fermés, et bornée. En dimension finie,  $K$  est donc compact ; elle est non vide car elle contient  $a$ . D'après la question 1, il existe  $y_0 \in K$  tel que  $|x - y_0| = d(x, K) \leq r$ . Ensuite, si  $y \in F \setminus K$ , alors  $|x - y| > r \geq |x - y_0|$ . Enfin, si  $y \in K$ , on a  $|x - y| \geq |x - y_0|$ . Donc  $d(x, F) = |x - y_0|$  est atteinte en  $y_0 \in F$ .

3. La partie  $F$  est fermée, comme image réciproque de  $\{1\}$ . Ses points s'écrivent  $(x, 1/x)$  avec  $x \neq 0$ . On a

$$|(x, 1/x)|_2^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \geq 2,$$

avec égalité si et seulement si  $x = 1/x$ , soit  $x = \pm 1$ . **Donc**  $d(0, F) = \sqrt{2}$ , **atteinte exactement en**  $(1, 1)$  **et**  $(-1, -1)$ .

## Corrigé de l'exercice 4 : Le groupe orthogonal est compact

---

Voici la démarche, étape par étape.

1. L'application  $\varphi : M \rightarrow M^T M$  est continue, car ses coefficients sont des polynômes en les  $m_{ij}$ . Ainsi  $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$  est fermé. De plus, pour  $M \in O_n(\mathbb{R})$ , les colonnes  $C_j$  sont unitaires. Par conséquent,  $|M|^2 = \sum_j |C_j|^2 = n$ . L'ensemble est donc borné. **En dimension finie,  $O_n(\mathbb{R})$  est compact.**
2. Le déterminant est continu, donc  $\det^{-1}(\{1\})$  est fermé. Ainsi  $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$  est l'intersection d'un compact et d'un fermé. **Donc  $SO_n(\mathbb{R})$  est compact.**
3. Pour  $M$  orthogonale,  $\det(M)^2 = \det(M^T M) = 1$ , donc  $\det M \in \{-1, 1\}$ . Les deux valeurs sont prises, en  $I_n$  et en  $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ . Si  $O_n(\mathbb{R})$  était connexe par arcs, son image par  $\det$  serait un intervalle contenant  $-1$  et  $1$ , donc  $0$ . **C'est absurde :  $O_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs.**
4. La trace est linéaire, donc continue, sur le compact non vide  $O_n(\mathbb{R})$ . Par le théorème des bornes atteintes, elle y admet un maximum et un minimum. Ensuite, chaque colonne est unitaire, donc  $|m_{ii}| \leq 1$ . Ainsi  $-n \leq \text{tr}(M) \leq n$ . Ces valeurs sont atteintes en  $-I_n$  et en  $I_n$ . **Le maximum vaut  $n$  et le minimum vaut  $-n$ .**

## Corrigé de l'exercice 5 : Théorème de Heine et continuité uniforme

---

1. La fonction racine est continue sur le compact  $[0, 1]$ . Par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. En revanche, pour  $x \in ]0, 1]$ , on a  $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , qui tend vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow 0$ . **Aucune constante de Lipschitz ne convient : la fonction n'est pas lipschitzienne.**
2. On a  $x_n - y_n = 1/n \rightarrow 0$ . Pourtant,  $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$ . Avec  $\varepsilon = 1$ , aucun  $\eta$  ne convient, car  $|x_n - y_n| \leq \eta$  pour  $n$  grand. **Donc  $x \rightarrow x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .**

## Suite de la démonstration

---

3. Soit  $\varepsilon > 0$ . D'abord, il existe  $A \geq 0$  tel que  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$  pour  $x \geq A$ . Par l'inégalité triangulaire,  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  dès que  $x, y \geq A$ . Ensuite,  $f$  est continue sur le compact  $[0, A + 1]$ . Par le théorème de Heine, il existe  $\eta_0 > 0$  adapté à  $\varepsilon$  sur ce segment. Posons  $\eta = \min(\eta_0, 1)$  et prenons  $|x - y| \leq \eta$ , avec  $x \leq y$ . Si  $y \leq A + 1$ , les deux points sont dans  $[0, A + 1]$ , donc  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . Sinon,  $y > A + 1$  et  $x \geq y - 1 > A$ , donc  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . **Ainsi  $f$  est uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .**
4. La fonction  $x \rightarrow x e^{-x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et tend vers 0 en  $+\infty$  par croissances comparées. **Elle est donc uniformément continue d'après la question 3.**

**Point de méthode :** on découpe le domaine en un compact, où Heine s'applique, et un voisinage de l'infini, où la limite contrôle tout ; la marge de 1 évite le problème des points à cheval.

## Corrigé de l'exercice 6 : Un maximum obtenu par compacité

---

1. De  $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ , on tire  $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{r^2}{2}$ . En multipliant par  $e^{-r^2} > 0$ , on obtient  $|f(x, y)| \leq \frac{r^2}{2} e^{-r^2}$ .
2. Posons  $t = r^2 \geq 4$ . La fonction  $t \rightarrow \frac{t}{2} e^{-t}$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Donc

$|f(x, y)| \leq \frac{4}{2} e^{-4} = 2 e^{-4}$ . Or  $2 < e^2$ , donc  $2e^{-4} < e^{-2}$ . Ainsi  $|f(x, y)| < e^{-2}$  dès que  $r \geq 2$ .

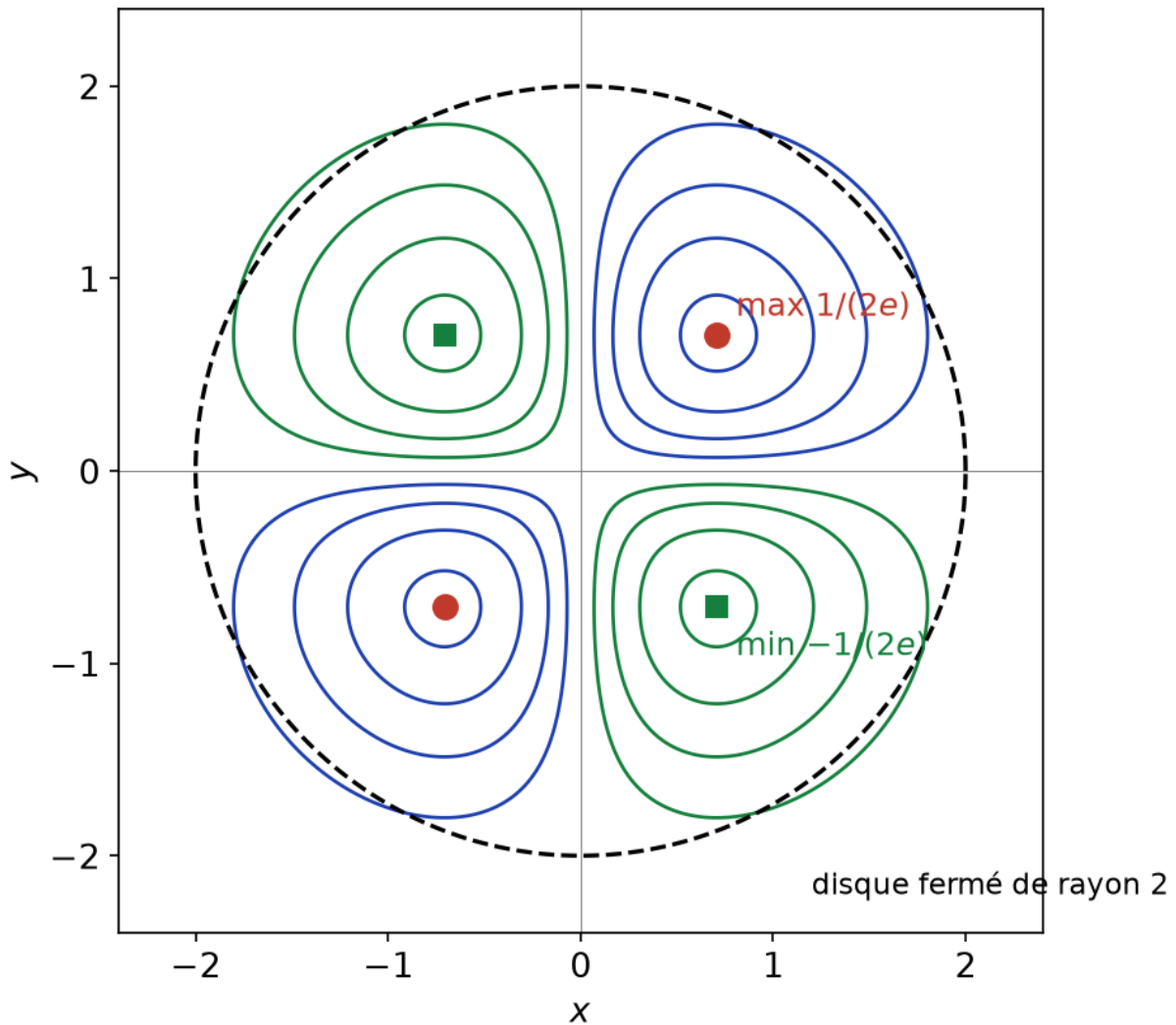
3. Soit  $D$  le disque fermé de centre  $0$  et de rayon  $2$ . Il est fermé et borné en dimension finie, donc compact. La fonction  $f$  est continue sur  $D$  : elle y atteint son maximum  $M$  en un point  $p$ . De plus,  $(1, 1) \in D$  car  $1 + 1 \leq 4$ , et  $f(1, 1) = e^{-2}$ . Donc  $M \geq e^{-2}$ . Enfin, hors de  $D$ , la question 2 donne  $f < e^{-2} \leq M$ . **Par conséquent,  $M = f(p)$  est le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .**

## Fin de la résolution

---

4. Posons  $\theta(t) = \frac{t}{2} e^{-t}$ . On a  $\theta'(t) = \frac{1}{2}(1 - t)e^{-t}$ , donc  $\theta$  est maximale en  $t = 1$ , avec  $\theta(1) = \frac{1}{2e}$ . Ainsi  $f(x, y) \leq \frac{1}{2e}$  partout. Il y a égalité si et seulement si  $xy = \frac{x^2 + y^2}{2}$  et  $r^2 = 1$ . La première condition équivaut à  $(x - y)^2 = 0$ , soit  $x = y$ . Avec  $2x^2 = 1$ , on trouve  $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . **Le maximum vaut  $\frac{1}{2e}$ , atteint en  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .** Enfin,  $f(x, -y) = -f(x, y)$ . **Le minimum vaut donc  $-\frac{1}{2e}$ , atteint en  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .**

La figure ci-dessous montre les lignes de niveau de  $f$ , le disque compact utilisé et les quatre points extrémaux. On y voit que  $f$  est très petite près du bord du disque, conformément à la question 2.



## Corrigé de l'exercice 7 : Point fixe d'une application strictement contractante

1. Pour tous  $x, y \in K$ , on a  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ , y compris si  $x = y$ . **Donc  $f$  est 1-lipschitzienne, donc continue.**
2. La fonction  $g$  est continue, comme composée de  $x \rightarrow f(x) - x$  et de la norme. Elle atteint donc son minimum sur le compact non vide  $K$  en un point  $a$ . Supposons  $g(a) > 0$ , c'est-à-dire  $f(a) \neq a$ . Alors, en posant  $b = f(a) \in K$ , on obtient

$$g(b) = |f(f(a)) - f(a)| < |f(a) - a| = g(a).$$

Cela contredit la minimalité de  $g(a)$ . Donc  $f(a) = a$ . Ensuite, si  $a$  et  $a'$  sont deux points fixes distincts,  $|a - a'| = |f(a) - f(a')| < |a - a'|$ , ce qui est absurde. **Ainsi  $f$  admet un**

**unique point fixe.**

3. Pour  $x \neq y$ , on a

$$|h(x) - h(y)| = \frac{|x^2 - y^2|}{h(x) + h(y)} = |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{h(x) + h(y)}.$$

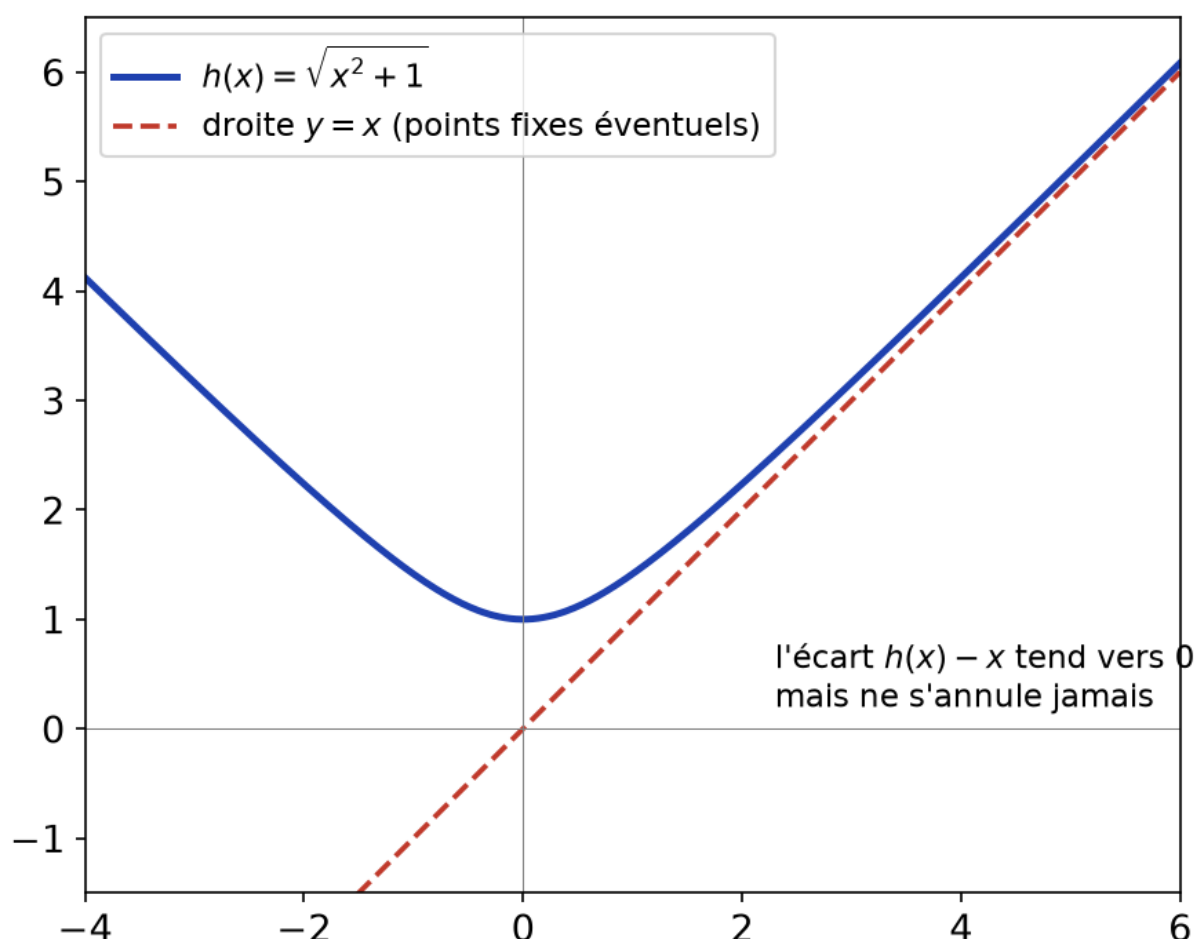
Or  $|x + y| \leq |x| + |y| < h(x) + h(y)$ , car  $h(x) > |x|$ . Donc  $|h(x) - h(y)| < |x - y|$ .  
Cependant,  $h(x) > |x| \geq x$  pour tout  $x$ . **Donc  $h$  n'a pas de point fixe : l'hypothèse manquante est la compacité, car  $\mathbb{R}$  est fermé mais non borné.**

## Suite du raisonnement

---

4. D'abord,  $d_{n+1} = |f(u_n) - f(a)| \leq |u_n - a| = d_n$ . La suite  $(d_n)$  est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel  $d \geq 0$ . Ensuite, par compacité, une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  converge vers  $b \in K$ . Alors  $|b - a| = \lim d_{\varphi(n)} = d$ . De plus,  $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \rightarrow f(b)$  par continuité, donc  $|f(b) - a| = \lim d_{\varphi(n)+1} = d$ . Si  $b \neq a$ , on aurait  $d = |f(b) - f(a)| < |b - a| = d$ , ce qui est absurde. Donc  $b = a$  et  $d = |b - a| = 0$ . **Par conséquent,  $(u_n)$  converge vers  $a$ .**

La figure ci-dessous illustre la question 3. Le graphe de  $h$  se rapproche de la droite  $y = x$  sans jamais la couper. L'infimum de  $h(x) - x$  vaut 0, mais il n'est pas atteint, faute de compacité.



## Corrigé de l'exercice 8 : Somme de deux parties

1. Le produit  $A \times B$  est compact dans  $E \times E$ , comme produit fini de compacts. L'application  $s : (a, b) \rightarrow a + b$  est linéaire et vérifie  $|a + b| \leq 2 \max(|a|, |b|)$  : elle est continue. **Ainsi  $A + B = s(A \times B)$  est compact, comme image continue d'un compact.**
2. Soit  $(z_n)$  une suite de  $A + B$  qui converge vers  $z \in E$ . On écrit  $z_n = a_n + b_n$ . Par compacité de  $A$ , une sous-suite  $(a_{\varphi(n)})$  converge vers  $a \in A$ . Ensuite,  $b_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$  converge vers  $z - a$ . Comme  $B$  est fermé,  $z - a \in B$ . **Donc  $z = a + (z - a) \in A + B$  : la partie  $A + B$  est fermée.**
3. On a  $A = \{(x, y) : xy = 1\} \cap \{(x, y) : x \geq 0\}$ , car  $xy = 1$  interdit  $x = 0$ . C'est une intersection de deux fermés. De même,  $B$  est l'image réciproque de  $\{0\}$  par  $(x, y) \rightarrow y$ , donc fermée. Soit maintenant  $(u, v)$  avec  $v > 0$ . En posant  $x = 1/v$  et  $t = u - 1/v$ , on obtient  $(u, v) = (x, 1/x) + (t, 0)$ . Réciproquement, tout élément de  $A + B$  a une ordonnée  $1/x > 0$ . **Donc  $A + B = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Cette partie n'est pas fermée, car**

$(0, 1/n) \rightarrow (0, 0) \notin A + B$ . La somme de deux fermés n'est donc pas toujours fermée : l'hypothèse de compacité de la question 2 est essentielle.

## Corrigé de l'exercice 9 : Parties connexes par arcs du plan

---

Suivons les questions dans l'ordre.

1. L'application  $\Phi : (r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$  est continue sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Cette partie est convexe, donc connexe par arcs. De plus, tout point non nul du plan s'écrit en coordonnées polaires avec  $r > 0$ , et  $\Phi$  ne prend jamais la valeur  $(0, 0)$ . Ainsi  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est connexe par arcs, comme image continue d'une partie connexe par arcs.
2. Supposons que  $(1-t)a + tb = 0$  pour un  $t \in [0, 1]$ . En prenant les normes,  $1-t = t$ , donc  $t = 1/2$  et  $b = -a$ , ce qui est exclu. Le dénominateur ne s'annule donc pas. Par conséquent,  $\gamma$  est continue, à valeurs dans  $S$ , avec  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ . Si  $b = -a$ , on choisit  $c \in S$  différent de  $a$  et de  $-a$ , ce qui est possible car  $n \geq 2$ . On relie alors  $a$  à  $c$ , puis  $c$  à  $-a$ , et on concatène. La sphère  $S$  est connexe par arcs.

## Suite de la résolution

---

3. Si  $(x, y) \in C$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , alors  $(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 xy = 0$ . Le segment  $[0, (x, y)]$  est donc inclus dans  $C$  :  $C$  est étoilée par rapport à l'origine. En revanche,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  sont dans  $C$ , mais leur milieu  $(1/2, 1/2)$  vérifie  $xy = 1/4 \neq 0$ . Donc  $C$  n'est pas convexe.
4. La fonction  $\psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  est continue sur  $U$ . Elle vaut  $-1$  en  $(0, 0)$  et  $3$  en  $(2, 0)$ , deux points de  $U$ . Cependant, elle ne s'annule pas sur  $U$ . Son image n'est donc pas un intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires généralisé,  $U$  n'est pas connexe par arcs.

## Corrigé de l'exercice 10 : Fonctions continues sur une partie connexe par arcs

---

1. L'image  $f(A)$  est un intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires généralisé. Or un intervalle inclus dans  $\mathbb{Z}$  contient au plus un point, car entre deux entiers distincts se trouve un non-entier. **Donc  $f$  est constante.**
2. La fonction  $h = f/g$  est continue sur  $A$ , car  $g$  ne s'annule pas. De plus,  $h^2 = 1$ , donc  $h$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ . Son image est un intervalle inclus dans  $\{-1, 1\}$ , donc réduit à un point. **Ainsi  $h$  est constante égale à 1 ou à -1, c'est-à-dire  $f = g$  ou  $f = -g$ .**
3. Supposons  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue et injective. Son image  $I = \varphi(\mathbb{R}^2)$  est un intervalle, car  $\mathbb{R}^2$  est convexe. Par injectivité,  $I$  contient au moins deux points : son intérieur est non vide. Choisissons  $c$  intérieur à  $I$  et  $p$  tel que  $\varphi(p) = c$ . D'après l'exercice 9,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  est connexe par arcs, par translation. Son image  $I \setminus \{c\}$  devrait donc être un intervalle. Or  $c$  est intérieur à  $I$  : il existe des points de  $I$  de part et d'autre de  $c$ . **C'est absurde : aucune application continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  n'est injective.**

**Point de méthode :** retirer un point est un test puissant ; un intervalle ouvert privé d'un point n'est plus connexe par arcs, alors que le plan privé d'un point le reste.

## Corrigé de l'exercice 11 : Deux points antipodaux de même image

---

1. Le cercle  $\mathcal{S}$  est l'image de  $\mathbb{R}$  par  $\theta \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$ , qui est continue. Or  $\mathbb{R}$  est connexe par arcs. **Donc  $\mathcal{S}$  est connexe par arcs.**
2. L'application  $x \rightarrow -x$  envoie  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$  et elle est continue. Ainsi  $g$  est continue sur  $\mathcal{S}$ . De plus,  $g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)$ . Fixons  $x_0 \in \mathcal{S}$ . L'image  $g(\mathcal{S})$  est un intervalle contenant  $g(x_0)$  et  $-g(x_0)$ . Elle contient donc 0. **Il existe  $x \in \mathcal{S}$  tel que  $g(x) = 0$ , soit  $f(x) = f(-x)$ .**
3. Pour ce point  $x$ , on a  $x \neq -x$  car  $x \neq 0$ . Pourtant  $f(x) = f(-x)$ . **Aucune application continue de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}$  n'est donc injective.**

4. On assimile l'équateur à un cercle, et la température à une fonction continue de la position. **À chaque instant, il existe deux points diamétralement opposés de l'équateur où la température est la même.**

## Corrigé de l'exercice 12 : Comparaison des normes usuelles

---

Regardons chaque cas avec soin.

1. D'abord, pour tout  $i$ ,  $x_i^2 \leq \sum_j x_j^2$ , donc  $N_\infty \leq N_2$ . Ensuite,  

$$N_1(x)^2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} |x_i||x_j| \geq N_2(x)^2$$
, donc  $N_2 \leq N_1$ . De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à  $(|x_1|, \dots, |x_n|)$  et  $(1, \dots, 1)$  donne  $N_1(x) \leq \sqrt{n} N_2(x)$ . Enfin,  $N_2(x)^2 = \sum_i x_i^2 \leq n N_\infty(x)^2$ . **On a bien les quatre inégalités annoncées.**
2. Pour  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , on a  $N_\infty(e_1) = N_2(e_1) = N_1(e_1) = 1$  : les deux premières inégalités sont des égalités. Pour  $u = (1, \dots, 1)$ , on a  $N_1(u) = n$ ,  $N_2(u) = \sqrt{n}$  et  $N_\infty(u) = 1$ . Ainsi  $N_1(u) = \sqrt{n} N_2(u)$  et  $N_2(u) = \sqrt{n} N_\infty(u)$ . **Les quatre constantes sont atteintes, donc optimales.**
3. Soit  $P_m = 1 + X + \dots + X^m$ . On a  $N_1(P_m) = m + 1$  et  $N_\infty(P_m) = 1$ . S'il existait  $\beta$  tel que  $N_1 \leq \beta N_\infty$ , on aurait  $m + 1 \leq \beta$  pour tout  $m$ . **C'est impossible : les deux normes ne sont pas équivalentes sur  $\mathbb{R}[X]$ .**
4. Posons  $Q_m = \frac{1}{m}(1 + X + \dots + X^{m-1})$ . Alors  $N_\infty(Q_m) = 1/m \rightarrow 0$ , tandis que  $N_1(Q_m) = 1$ . **La suite  $(Q_m)$  tend vers 0 pour  $N_\infty$  mais pas pour  $N_1$ .**

## Corrigé de l'exercice 13 : Normes sur les polynômes de degré au plus n

---

1. D'abord,  $N(P)$  est fini, car  $P$  est continue sur le compact  $[0, 1]$ . L'homogénéité

$N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$  et l'inégalité triangulaire se vérifient point par point, puis en passant au sup. Ensuite, si  $N(P) = 0$ , alors  $P$  s'annule sur  $[0, 1]$ . Il a donc une infinité de racines, d'où  $P = 0$ . Ainsi  $N$  est une norme sur  $E$ .

2. La dérivation  $D: P \rightarrow P'$  est linéaire de  $E$  dans  $E$ . Or  $E$  est de dimension finie  $n + 1$ . Par le théorème de continuité des applications linéaires en dimension finie,  $D$  est continue pour  $N$ . Il existe donc  $C_n > 0$  tel que  $N(P') \leq C_n N(P)$  pour tout  $P \in E$ .

3. Pour  $P = X^n$ , on a  $N(P) = 1$  et  $N(P') = \sup_{[0, 1]} n t^{n-1} = n$ . Donc  $n \leq C_n \cdot 1$ . Ainsi  $C_n \geq n$  : la constante ne peut pas être choisie indépendamment de  $n$ .

### Questions 3 à 5

---

4. Par hypothèse,  $\sup_{[0, 1]} |P_k - f| \rightarrow 0$ . Pour  $k$  assez grand, on a donc  $N(P_k) \leq \sup_{[0, 1]} |f| + 1$ . La suite  $(P_k)$  est bornée dans l'espace de dimension finie  $E$ . Elle admet donc une sous-suite  $(P_{\varphi(k)})$  qui converge vers un  $P \in E$  pour  $N$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a alors  $|P_{\varphi(k)}(t) - P(t)| \leq N(P_{\varphi(k)} - P) \rightarrow 0$ . Or  $P_{\varphi(k)}(t) \rightarrow f(t)$ . Par unicité de la limite,  $f(t) = P(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

5. D'après la question 4,  $N(P_k - P) = \sup_{[0, 1]} |P_k - f| \rightarrow 0$ . Ainsi  $P_k \rightarrow P$  dans  $(E, N)$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La forme linéaire  $Q \rightarrow Q(x)$  est continue sur  $E$ , car  $E$  est de dimension finie. Par conséquent,  $P_k(x) \rightarrow P(x)$ , même pour  $x \notin [0, 1]$ .

**Point de méthode :** en dimension finie, on choisit la norme la plus commode pour chaque question ; ici la convergence uniforme sur  $[0, 1]$  équivaut à la convergence des coefficients.

## Corrigé de l'exercice 14 : Continuité du déterminant et parties de $M_n(K)$

---

1. L'espace  $M_n(K)$  est de dimension finie. D'abord,  $\text{tr}$  et  $A \rightarrow A^T$  sont linéaires, donc

continues. Ensuite,  $(A, B) \rightarrow AB$  est bilinéaire, donc continue. Par composition,  $A \rightarrow A^k$  est continue. Enfin,  $\det A$  est une expression polynomiale des coefficients  $a_{ij}$ . **Toutes ces applications sont continues.**

- On a  $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ , image réciproque d'un ouvert par une application continue. De même,  $SL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$ . **Le premier est ouvert, le second est fermé.**
- On a  $\mathcal{N} = \{A : A^n = 0\}$ , image réciproque du fermé  $\{0\}$  par l'application continue  $A \rightarrow A^n$ . **Donc  $\mathcal{N}$  est fermé.**
- Si  $r = n$ , l'ensemble est  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , qui est fermé. Sinon, son complémentaire est l'ensemble des matrices de rang au moins  $r + 1$ . C'est la réunion, sur les mineurs  $\delta$  de taille  $r + 1$ , des ouverts  $\{A : \delta(A) \neq 0\}$ , car chaque mineur est polynomial en les coefficients. **Le complémentaire est ouvert, donc l'ensemble des matrices de rang au plus  $r$  est fermé.**
- Pour  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ , on a  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^T$ . Les coefficients de  $\text{Com}(A)$  sont des déterminants extraits, donc polynomiaux. De plus,  $\det$  ne s'annule pas sur  $GL_n(\mathbb{K})$ . **Chaque coefficient de  $A^{-1}$  est un quotient de fonctions continues :  $A \rightarrow A^{-1}$  est continue.**

## **Corrigé de l'exercice 15 : Densité de $GL_n$ et polynôme caractéristique de $AB$**

---

- La fonction  $x \rightarrow \det(A - x I_n)$  est polynomiale de degré  $n$ , de coefficient dominant  $(-1)^n$ . Elle a donc au plus  $n$  racines. Par conséquent, il existe  $p_0$  tel que  $1/p$  ne soit pas racine pour  $p \geq p_0$ . Ainsi  $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$  est inversible pour  $p \geq p_0$ , et  $A_p \rightarrow A$ . **Toute matrice est limite de matrices inversibles :  $GL_n(\mathbb{K})$  est dense.**
- Comme  $A$  est inversible,  $BA = A^{-1}(AB)A$ . Les matrices  $AB$  et  $BA$  sont donc semblables. **Elles ont le même polynôme caractéristique.**
- Fixons  $B$  et  $x \in \mathbb{K}$ . L'application  $\Psi : A \rightarrow \det(x I_n - AB) - \det(x I_n - BA)$  est polynomiale en les coefficients de  $A$ , donc continue. Elle est nulle sur la partie dense  $GL_n(\mathbb{K})$ . Pour  $A$  quelconque, on écrit  $A = \lim A_p$  avec  $A_p$  inversibles, et  $\Psi(A) = \lim \Psi(A_p) = 0$ . Ainsi  $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{K}$ . Les deux polynômes coïncident en une infinité de points. **Donc  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$  pour toutes matrices  $A, B$ .**

4. On calcule  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Or la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle. **Donc  $AB$  et  $BA$  ne sont pas semblables, bien qu'elles aient le même polynôme caractéristique  $X^2$ .**

**Point de méthode :** pour étendre une identité continue en  $A$ , il suffit de la prouver sur une partie dense, souvent  $GL_n(\mathbb{K})$ .

## Corrigé de l'exercice 16 : Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$

---

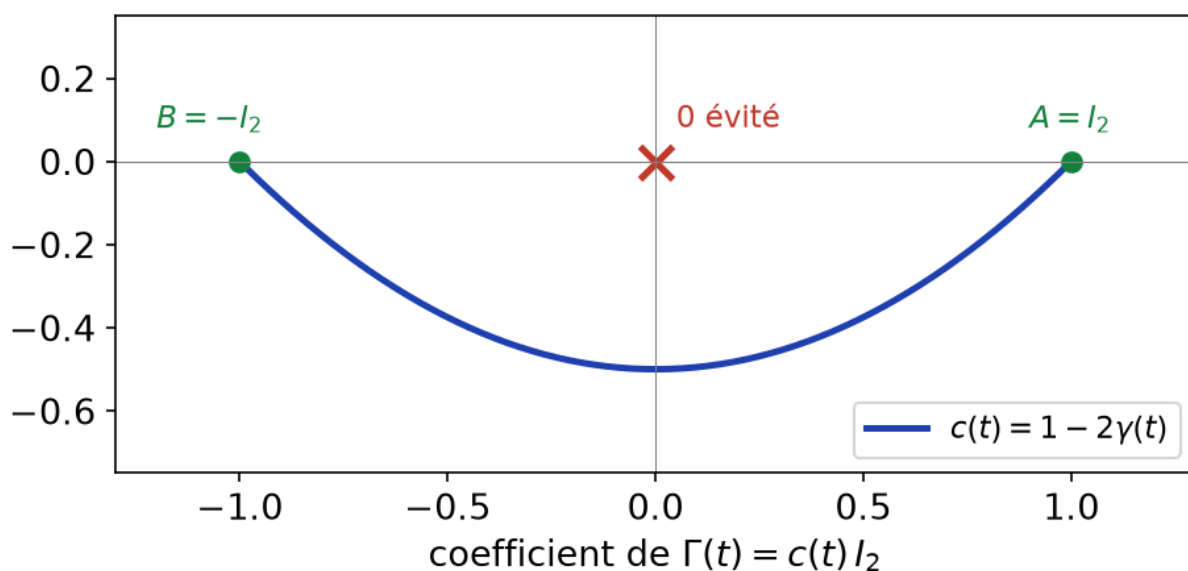
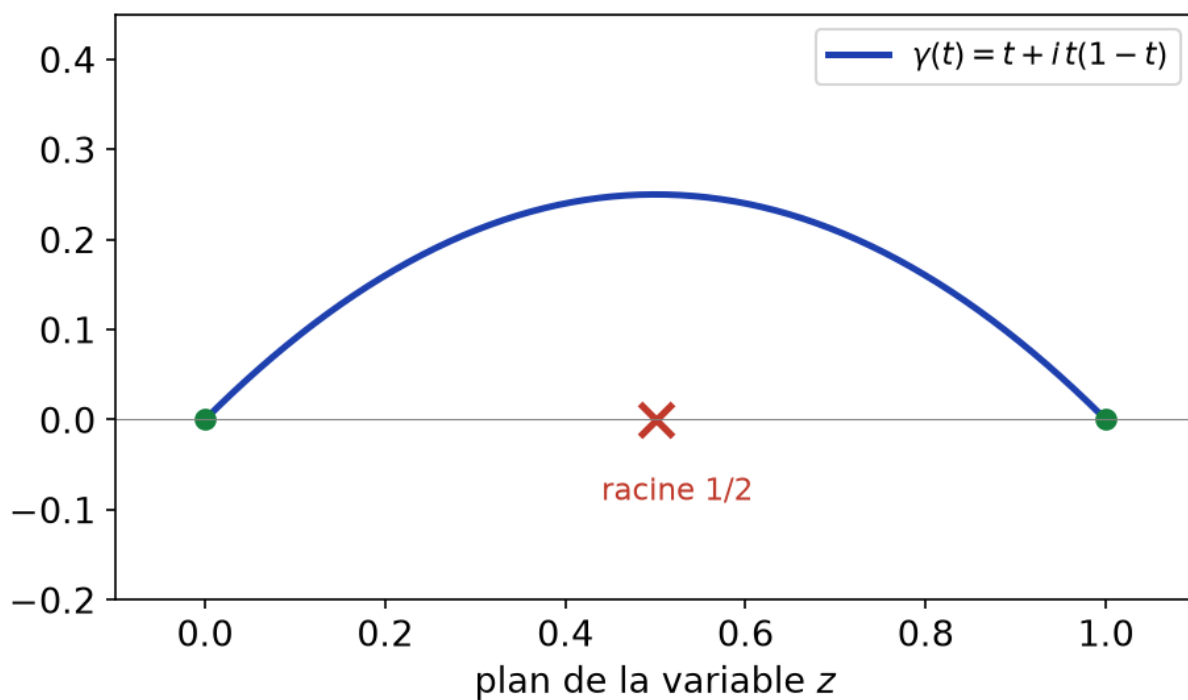
- Chaque coefficient de  $(1-z)A + zB$  est une fonction affine de  $z$ . Le déterminant est un polynôme en les coefficients, donc  $P$  est un polynôme en  $z$  de degré au plus  $n$ . De plus,  $P(0) = \det A \neq 0$ , donc  $P$  est non nul. **Ainsi  $Z$  est fini, de cardinal au plus  $n$ .** Enfin,  $P(0) = \det A \neq 0$  et  $P(1) = \det B \neq 0$ , **donc  $0, 1 \notin Z$ .**
- Supposons  $\gamma_s(t) = \gamma_{s'}(t')$ . Les parties réelles donnent  $t = t'$ . Les parties imaginaires donnent ensuite  $(s - s')t(1 - t) = 0$ . Comme  $s \neq s'$ , on obtient  $t \in \{0, 1\}$ . **Deux arcs distincts ne se rencontrent qu'en 0 et 1.** Par conséquent, chaque point de  $Z$ , qui n'est ni 0 ni 1, appartient à au plus un arc. Les arcs qui rencontrent  $Z$  sont donc en nombre fini. **Comme  $\mathbb{R}$  est infini, il existe  $s$  tel que  $\gamma_s$  évite  $Z$ .**

## Suite de la preuve

---

- On pose  $\Gamma(t) = (1 - \gamma_s(t))A + \gamma_s(t)B$ . C'est une application continue de  $[0, 1]$  dans  $M_n(\mathbb{C})$ , avec  $\Gamma(0) = A$  et  $\Gamma(1) = B$ . De plus,  $\det \Gamma(t) = P(\gamma_s(t)) \neq 0$ , car  $\gamma_s(t) \notin Z$ . **Le chemin  $\Gamma$  reste dans  $GL_n(\mathbb{C})$ , qui est donc connexe par arcs.**
- Pour  $A = I_2$  et  $B = -I_2$ , on obtient  $P(z) = \det((1 - 2z)I_2) = (1 - 2z)^2$ , donc  $Z = \{1/2\}$ . Prenons  $s = 1$  : la partie imaginaire de  $\gamma_1(t) = t + it(1 - t)$  ne s'annule qu'en  $t = 0$  et  $t = 1$ . Donc  $\gamma_1$  évite  $1/2$ . **Le chemin  $\Gamma(t) = (1 - 2t - 2it(1 - t))I_2$  relie  $I_2$  à  $-I_2$  dans  $GL_2(\mathbb{C})$ .** Ensuite, un chemin réel de  $I_2$  à  $\text{diag}(-1, 1)$  aurait un déterminant réel continu passant de 1 à -1. **Par le théorème des valeurs intermédiaires, il s'annulerait : un tel chemin ne peut pas rester dans  $GL_2(\mathbb{R})$ .**

La figure ci-dessous montre l'arc  $\gamma_1$ , qui contourne la racine  $1/2$ , puis le coefficient  $c(t) = 1 - 2\gamma_1(t)$  de la matrice  $\Gamma(t) = c(t) I_2$ . Ce coefficient va de  $1$  à  $-1$  en passant sous l'origine, donc sans jamais s'annuler.



## Corrigé de l'exercice 17 : Composantes connexes par arcs des projecteurs

---

1. L'application  $A \rightarrow A^2 - A$  est continue, et  $\mathcal{P}$  est l'image réciproque de  $\{0\}$  : il est fermé. Ensuite, notons  $E_{1n}$  la matrice élémentaire d'indice  $(1, n)$  et posons  $P_t = J_1 + tE_{1n}$ . On a  $J_1 E_{1n} = E_{1n}$ ,  $E_{1n} J_1 = 0$  car  $n \neq 1$ , et  $E_{1n}^2 = 0$ . Donc  $P_t^2 = J_1 + tE_{1n} = P_t$ . **Comme le coefficient  $t$  est arbitraire,  $\mathcal{P}$  n'est pas borné.**
2. Le polynôme  $X^2 - X = X(X - 1)$  annule  $P$  et il est scindé à racines simples. Donc  $P$  est diagonalisable, avec des valeurs propres dans  $\{0, 1\}$ . Il est semblable à  $J_r$ , où  $r$  est la multiplicité de 1. Alors  $\text{rg}(P) = \text{rg}(J_r) = r$  et  $\text{tr}(P) = \text{tr}(J_r) = r$ . **Ainsi  $\text{rg}(P) = \text{tr}(P)$ .**
3. La fonction  $t \rightarrow \text{tr}(\gamma(t))$  est continue sur  $[0, 1]$ , comme composée de fonctions continues. D'après la question 2, elle est à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Or  $[0, 1]$  est connexe par arcs, donc son image est un intervalle d'entiers réduit à un point. **Le rang de  $\gamma(t)$  est donc constant.**

### Questions 4 et suivantes

---

4. La question 2 montre que tout  $P \in \mathcal{P}_r$  s'écrit  $Q J_r Q^{-1}$ . Réciproquement,  $(Q J_r Q^{-1})^2 = Q J_r^2 Q^{-1} = Q J_r Q^{-1}$ , et cette matrice est de rang  $r$ . D'où l'égalité annoncée. Ensuite,  $Q \rightarrow Q J_r Q^{-1}$  est continue sur  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ , car le produit et l'inversion le sont. **Donc  $\mathcal{P}_r$  est connexe par arcs, comme image continue de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .**
5. Les parties  $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$  recouvrent  $\mathcal{P}$ , sont connexes par arcs, et aucun chemin de  $\mathcal{P}$  ne relie deux d'entre elles d'après la question 3. **Ce sont exactement les  $n + 1$  composantes connexes par arcs de  $\mathcal{P}$ .** Ensuite,  $\mathcal{P}_0 = \{0\}$ , et un projecteur de rang  $n$  est inversible, donc  $P = P^{-1}P^2 = I_n$  : ainsi  $\mathcal{P}_n = \{I_n\}$ . Ces deux parties sont compactes. Enfin, pour  $1 \leq r \leq n - 1$ , le calcul de la question 1 montre que  $J_r + tE_{1n}$  est un projecteur de trace  $r$ , car  $E_{1n}J_r = 0$  (la colonne  $n$  de  $J_r$  est nulle). **Ces composantes ne sont pas bornées : seules  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_n$  sont compactes.**

## Corrigé de l'exercice 18 : Meilleure approximation polynomiale

---

1. La restriction de  $\|\cdot\|_\infty$  à  $F$  est une norme sur l'espace de dimension finie  $F$ . La partie  $K$  est une boule fermée de  $F$  : elle est fermée et bornée, donc compacte. Elle est non vide car elle contient  $0$ . L'application  $P \mapsto \|f - P\|_\infty$  est 1-lipschitzienne, donc continue. Elle atteint son minimum sur  $K$  en un  $P^*$ , et  $\|f - P^*\|_\infty \leq \|f - 0\|_\infty = \|f\|_\infty$ . Ensuite, si  $P \in F \setminus K$ , alors

$$\|f - P\|_\infty \geq \|P\|_\infty - \|f\|_\infty > \|f\|_\infty \geq \|f - P^*\|_\infty.$$

**Donc  $P^*$  minimise  $\|f - P\|_\infty$  sur tout  $F$  :  $\|f - P^*\|_\infty = d(f, F)$ .**

2. Pour une constante  $c$ , la fonction  $x \mapsto x^2 - c$  est croissante sur  $[0, 1]$  et prend ses valeurs dans  $[-c, 1 - c]$ . Donc  $\|f - c\|_\infty = \max(|c|, |1 - c|)$ . Or  $|c| + |1 - c| \geq 1$ , donc ce maximum vaut au moins  $1/2$ , avec égalité si et seulement si  $c = 1/2$ . **La meilleure constante est  $1/2$ , et  $d(f, \mathbb{R}_0[X]) = 1/2$ .**

### Les dernières questions

---

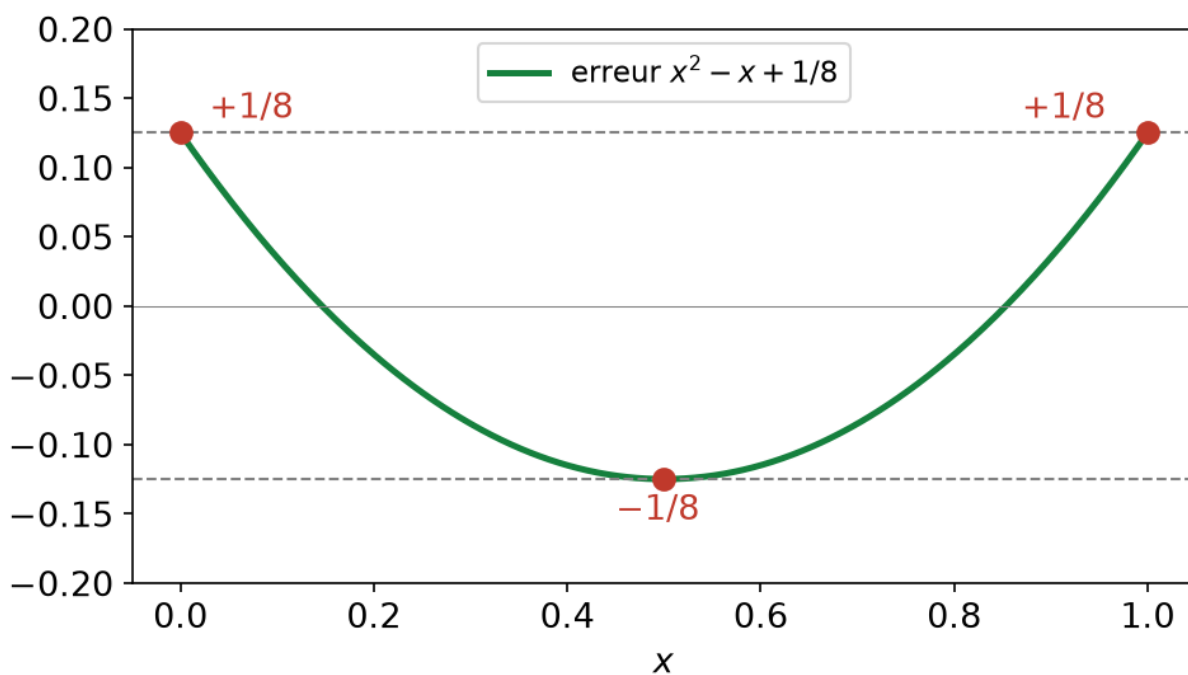
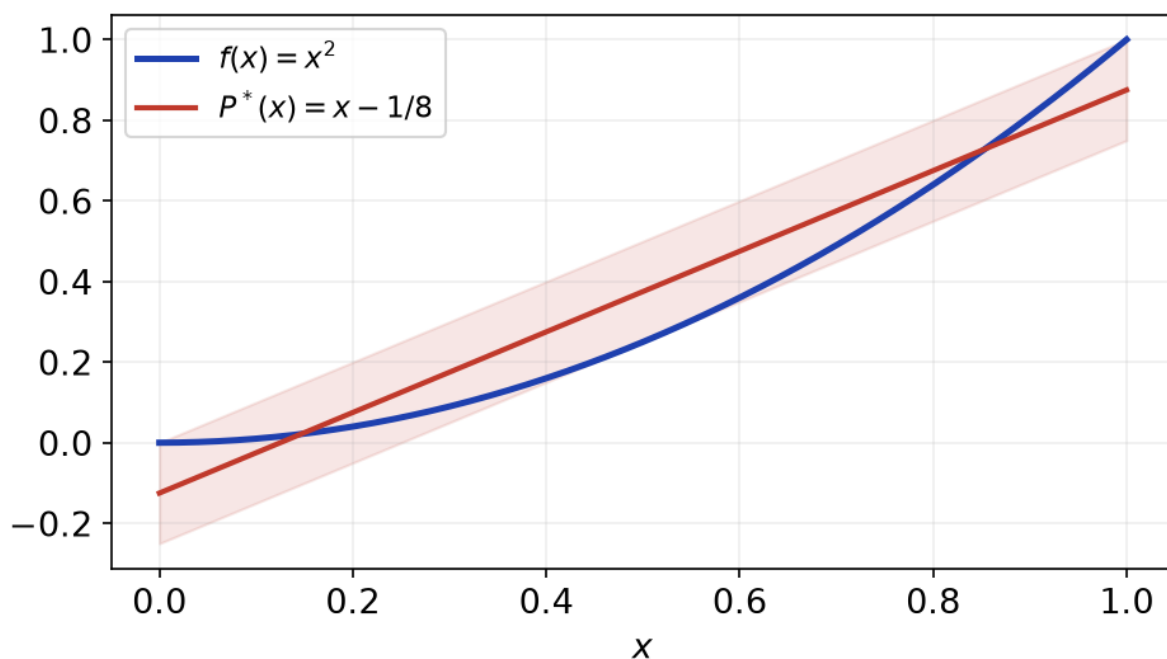
3. On a  $e(0) = -b$ ,  $e(1/2) = \frac{1}{4} - \frac{a}{2} - b$  et  $e(1) = 1 - a - b$ . Donc

$$e(0) - 2e(1/2) + e(1) = -b - \frac{1}{2} + a + 2b + 1 - a - b = \frac{1}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire,  $\frac{1}{2} \leq |e(0)| + 2|e(1/2)| + |e(1)| \leq 4\|e\|_\infty$ . **Ainsi  $\|f - P\|_\infty \geq 1/8$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_1[X]$ .**

4. Pour  $P^*(x) = x - 1/8$ , l'erreur vaut  $e(x) = x^2 - x + \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}$ . Sur  $[0, 1]$ , on a  $0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ . Donc  $-\frac{1}{8} \leq e(x) \leq \frac{1}{8}$ , et  $\|e\|_\infty = 1/8$ . **La borne de la question 3 est atteinte :  $d(f, \mathbb{R}_1[X]) = 1/8$ , réalisée par  $P^*(x) = x - 1/8$ .**

La figure ci-dessous représente  $f$  et  $P^*$ , puis l'erreur. Celle-ci atteint alternativement  $+1/8$ ,  $-1/8$  et  $+1/8$  aux points  $0$ ,  $1/2$  et  $1$ . Ce sont précisément les points utilisés à la question 3.



## Corrigé de l'exercice 19 : Problème : adhérence et intérieur des matrices diagonalisables

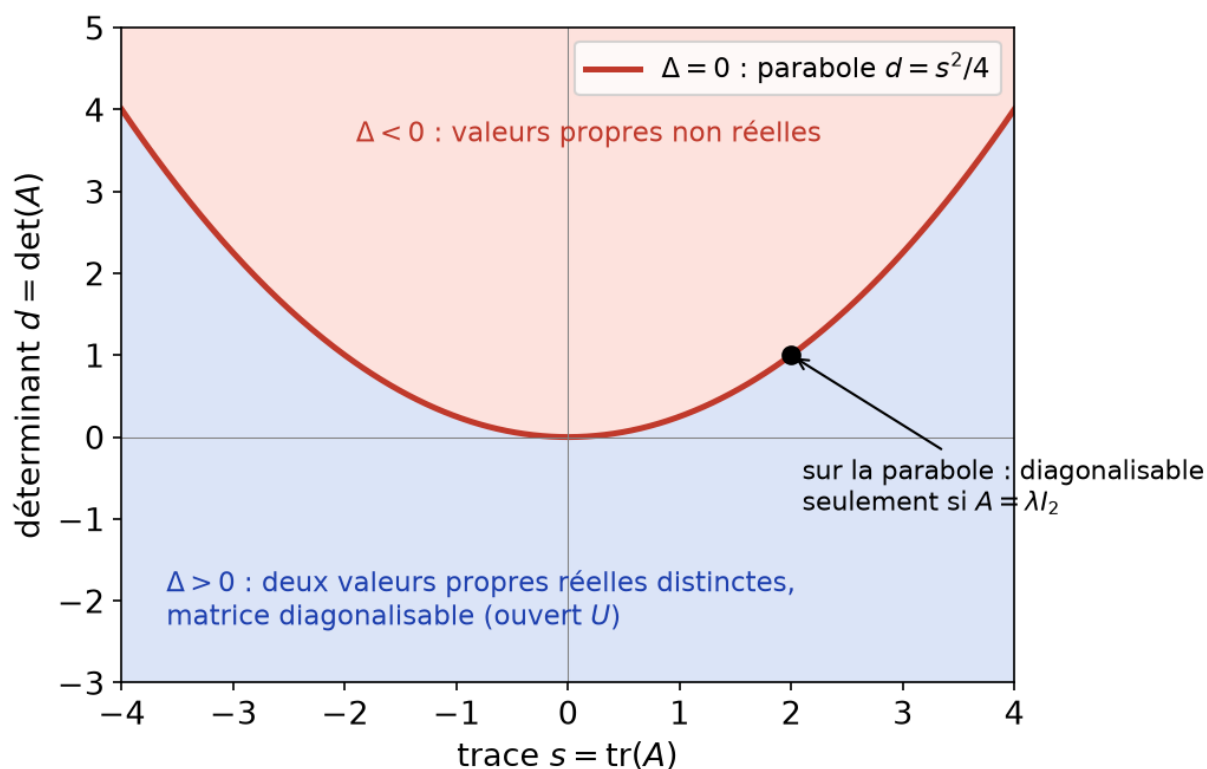
1. La trace est linéaire et le déterminant est polynomial en les coefficients. **Donc**  $\Delta = \text{tr}^2 - 4\det$  est polynomiale en les coefficients, donc continue sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Si  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , elle est semblable à  $\text{diag}(\lambda, \mu)$  avec  $\lambda, \mu$  réels. Alors  $\Delta(A) = (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu = (\lambda - \mu)^2$ . **Donc  $\Delta(A) \geq 0$ .**
3. D'abord,  $U = \Delta^{-1}(]0, +\infty[)$  est ouvert, par continuité de  $\Delta$ . Ensuite, si  $\Delta(A) > 0$ , le polynôme  $\chi_A$  a deux racines réelles distinctes. La matrice  $A$ , de taille 2, a donc deux valeurs propres distinctes. **Elle est diagonalisable :  $U \subset \mathcal{D}$ .**
4. Si  $\Delta(A) = 0$ , alors  $\chi_A = (X - \lambda)^2$  avec  $\lambda = \text{tr}(A)/2$ . Si  $A$  est diagonalisable, elle est semblable à  $\lambda I_2$ , donc  $A = P(\lambda I_2)P^{-1} = \lambda I_2$ . Réciproquement,  $\lambda I_2$  est diagonale. **Ainsi, sur  $\{\Delta = 0\}$ , les matrices diagonalisables sont exactement les matrices scalaires.**

## Questions 5 à 7

5. L'ensemble  $\{\Delta \geq 0\}$  est fermé et contient  $\mathcal{D}$  d'après la question 2. Il contient donc l'adhérence de  $\mathcal{D}$ . Réciproquement, il suffit de traiter  $\Delta(A) = 0$ , car  $\{\Delta > 0\} \subset \mathcal{D}$ . Le polynôme  $\chi_A$  est alors scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $A = P T P^{-1}$  avec  $T = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Posons  $A_k = P \begin{pmatrix} \lambda + k & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ . Cette matrice a deux valeurs propres distinctes, donc  $A_k \in \mathcal{D}$ . De plus,  $A_k \rightarrow A$  par continuité du produit. **L'adhérence de  $\mathcal{D}$  est donc  $\{A : \Delta(A) \geq 0\}$ .**
6. Comme  $U$  est un ouvert inclus dans  $\mathcal{D}$ , il est inclus dans l'intérieur de  $\mathcal{D}$ . Réciproquement, soit  $A \in \mathcal{D} \setminus U$ . Alors  $\Delta(A) = 0$ , donc  $A = \lambda I_2$  par la question 4. Posons  $B_k = \lambda I_2 + \frac{1}{k} E_{12}$ . On a  $\Delta(B_k) = (2\lambda)^2 - 4\lambda^2 = 0$ , et  $B_k$  n'est pas scalaire. Donc  $B_k \notin \mathcal{D}$ , alors que  $B_k \rightarrow A$ . **Ainsi  $A$  n'est pas intérieur, et l'intérieur de  $\mathcal{D}$  est exactement  $U$ .**
7. La partie  $\mathcal{D}$  n'est pas ouverte, car  $I_2 \in \mathcal{D}$  n'est pas intérieur. Elle n'est pas fermée non plus :  $E_{12}$  est dans l'adhérence, car  $\Delta(E_{12}) = 0$ , mais  $E_{12}$  n'est pas diagonalisable. **Donc  $\mathcal{D}$  n'est ni ouverte ni fermée.** Enfin, si  $A = P D P^{-1}$  avec  $D$  diagonale, alors  $tA = P(tD)P^{-1}$  est diagonalisable pour tout  $t \in [0, 1]$ . Le segment  $[0, A]$  est donc inclus dans  $\mathcal{D}$ . **La partie  $\mathcal{D}$  est étoilée par rapport à la matrice nulle, donc connexe par arcs.**

La figure ci-dessous résume le problème dans le plan des coordonnées (trace, déterminant). Sous la parabole  $d = s^2/4$ , on trouve l'ouvert  $U$ . Sur la parabole, seules les matrices scalaires sont diagonalisables. Au-dessus, les valeurs propres ne sont pas réelles.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

## Pour aller plus loin en maths spé

---

- Le cours : [compacité et connexité par arcs, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur compacité et connexité par arcs](#)
- À maîtriser avant : [Topologie d'un espace normé et continuité](#)
- Chapitre précédent : [Topologie d'un espace normé et continuité](#)
- Chapitre suivant : [Séries numériques et vectorielles](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)

