

Compacité et connexité

Exercice 1 : Parties compactes du plan

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme quelconque. Pour chacune des parties suivantes, dire si elle est compacte, en justifiant.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{22} + 2y^2 = 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. $P = \{(n, 0) : n \geq 1\} \cup \{(0, 0)\}$, puis $P \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 2 : Borel-Lebesgue à la main

Dans cet exercice, on utilise uniquement la définition par les recouvrements ouverts, sans passer par les suites.

1. Montrer que $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $[0, +\infty[$ n'est pas compact, en exhibant un recouvrement ouvert sans sous-recouvrement fini.
3. Même question pour $L = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$. On pourra utiliser des intervalles centrés en $\frac{1}{n}$ de rayon

$$\frac{1}{2n(n+1)}.$$

Exercice 3 : Opérations sur les compacts

Soit (E, d) un espace métrique.

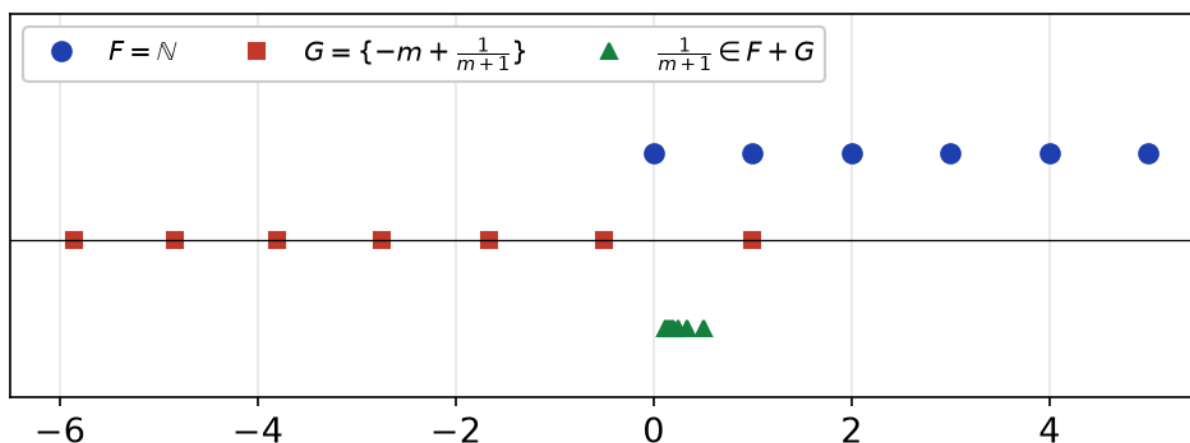
1. Montrer qu'une réunion finie de parties compactes de E est compacte.
2. Montrer qu'une intersection quelconque (non vide) de parties compactes de E est compacte.
3. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $p(x, y) = x$. Montrer que $p(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $H = \{(x, y) : xy = 1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, mais que $p(H)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Somme d'un compact et d'un fermé

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $A, B \subset E$, on note $A + B = \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} : a \in A, b \in B \right\}$.

1. Montrer que si K et L sont compacts, alors $K + L$ est compact.
2. Montrer que si K est compact et F fermé, alors $K + F$ est fermé.
3. Dans $\mathbb{R}$, on pose $F = \mathbb{N}$ et $G = \left\{ -m + \frac{1}{m+1} : m \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que F et G sont fermés, que $0 \notin F + G$, mais que 0 est adhérent à $F + G$. Conclure.

La figure ci-dessous représente les premiers points de F , de G et de la suite $\frac{1}{m+1}$ de la question 3.



Exercice 5 : Distance à un compact

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit K un compact non vide et $x \in E$. Montrer qu'il existe $y_0 \in K$ tel que $|x - y_0| = d(x, K)$.
2. Soit K et L deux compacts non vides et disjoints. Montrer que $d(K, L) = \inf\{|x - y| : x \in K, y \in L\}$ est atteinte et strictement positive.
3. Soit K compact et F fermé, non vides et disjoints. Montrer que $d(K, F) > 0$.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $F_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$. Montrer que ce sont deux fermés disjoints tels que $d(F_1, F_2) = 0$.

Exercice 6 : Maximum d'une fonction sur le plan

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x e^{-(x^2 + y^2)}$. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Montrer que $|f(x, y)| \leq r e^{-r^2}$, puis que $f(x, y) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$.

2. Montrer, par un argument de compacité, que f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer ces extrema et les points où ils sont atteints.

Exercice 7 : Équivalence des normes en dimension finie

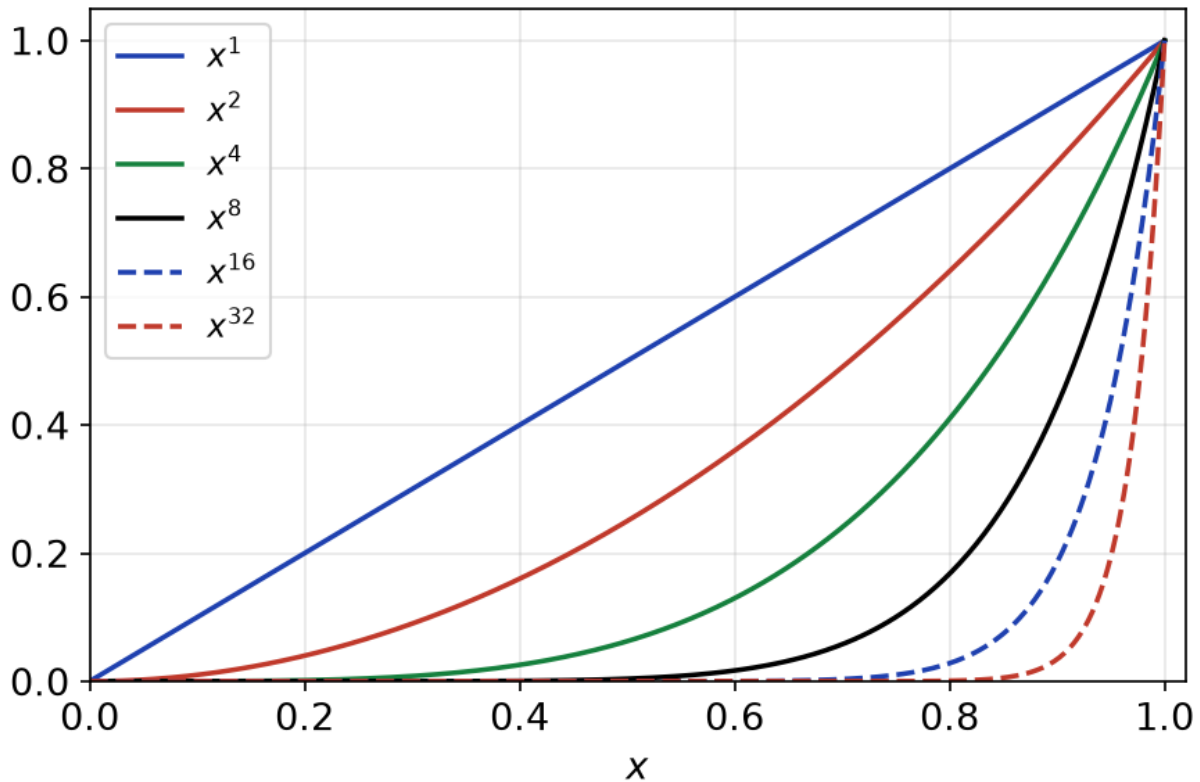
1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $N \leq \beta \|\cdot\|_\infty$, en déduire que N est continue sur $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, puis que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
2. Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose, pour $P = \sum_k a_k X^k$, $N_1(P) = \sum_k |a_k|$ et $N_\infty(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$. Vérifier que N_∞ est une norme et que $N_\infty \leq N_1$.
3. Justifier sans calcul que N_1 et N_∞ sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout n .
4. Calculer $N_1((X-1)^n)$ et $N_\infty((X-1)^n)$. En déduire que N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 : Continuité uniforme et théorème de Heine

1. Montrer que $x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$.
2. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique ($T > 0$). Montrer que f est uniformément continue.
4. Montrer que $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Sphère unité de $C([0,1])$ non compacte

On munit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^n$. La figure ci-dessous représente quelques-unes de ces fonctions.



1. Vérifier que chaque f_n appartient à la sphère unité de E .
2. Montrer qu'aucune sous-suite de (f_n) ne converge dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Calculer $\|f_n - f_{2n}\|_\infty$.
4. En déduire que la sphère unité et la boule unité fermée de E ne sont pas compactes. Quel théorème du cours retrouve-t-on ainsi ?

Exercice 10 : Suite ayant une seule valeur d'adhérence

Soit K un espace métrique compact et (x_n) une suite de K qui admet une unique valeur d'adhérence a .

1. Montrer que (x_n) converge vers a . On pourra raisonner par l'absurde et extraire une sous-suite restant hors d'une boule $B(a, \varepsilon)$.
2. Montrer que le résultat tombe en défaut dans $\mathbb{R}$ avec la suite définie par $x_n = n$ si n est impair et $x_n = 0$ si n est pair.
3. Application : soit $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dont le graphe $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.

Exercice 11 : Point fixe d'une application contractante au sens large

Soit (K, d) un espace métrique compact non vide et $f : K \rightarrow K$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x \neq y$.

1. Montrer que $g : x \rightarrow d(x, f(x))$ est continue et atteint son minimum en un point c .
2. Montrer que $f(c) = c$ et que c est l'unique point fixe de f .
3. Soit $x_0 \in K$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers c .
4. Montrer que $\sin$ vérifie l'hypothèse sur $[0,1]$ mais n'est pas k -lipschitzienne avec $k < 1$. Que dit la question 3 dans ce cas ?

Exercice 12 : Isométries d'un compact

Soit (K, d) un espace métrique compact et $f : K \rightarrow K$ une isométrie : $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous x, y . On veut montrer que f est surjective. On suppose par l'absurde qu'il existe $a \in K \setminus f(K)$.

1. Montrer que $f(K)$ est compact et que $\delta = d(a, f(K)) > 0$.
2. On pose $a_0 = a$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que $d(a_n, a_{n+k}) \geq \delta$ pour tous $n \geq 0$

et $k \geq 1$.

3. Conclure. En déduire que f est un homéomorphisme de K sur K .
4. Montrer que le résultat tombe en défaut sans compacité, avec $x \rightarrow x+1$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 13 : Parties connexes de $\mathbb{R}$

Dire si chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$ est connexe, en justifiant.

1. $\mathbb{Q}$.
2. $[0,1] \cup [2,3]$.
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
4. $\left\{ \frac{x}{x^2+2} : x \in \mathbb{R} \right\}$.
5. L'image de $\mathbb{R}$ par $h : x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$, que l'on déterminera.

Exercice 14 : Parties connexes par arcs du plan

1. Montrer que le disque fermé $\overline{B}(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs.
2. Une partie A est dite étoilée par rapport à $a \in A$ si $[a,x] \subset A$ pour tout $x \in A$.
Montrer qu'une partie étoilée est connexe par arcs.
3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, puis que la sphère unité euclidienne $S = \{x : |x|_2 = 1\}$ l'est aussi.
4. Montrer que l'hyperbole $H = \{(x,y) : xy = 1\}$ n'est pas connexe.
5. Soit I un intervalle et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe de φ est connexe par arcs.

Exercice 15 : Espaces non homéomorphes

Deux espaces métriques sont homéomorphes s'il existe une bijection continue entre eux dont la réciproque est continue. On utilise la connexité pour distinguer des espaces.

1. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. On pourra retirer un point.
2. Montrer que le segment $[0,1]$ et le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ne sont pas homéomorphes.
3. Montrer que $]0,1[$ et $[0,1[$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 16 : Fonctions continues à valeurs discrètes

1. Soit A une partie connexe d'un espace métrique et $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)^2 = 1$ pour tout x . Montrer que f est constante.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue ne prenant que des valeurs rationnelles. Montrer que f est constante.
4. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ localement constante : tout point de U possède un voisinage sur lequel f est constante. Montrer que f est constante.
5. La fonction $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ est localement constante sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas constante. Expliquer pourquoi cela ne contredit pas la question 4.

Exercice 17 : Connexité de $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$

Soit $n \geq 1$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ d'une norme quelconque.

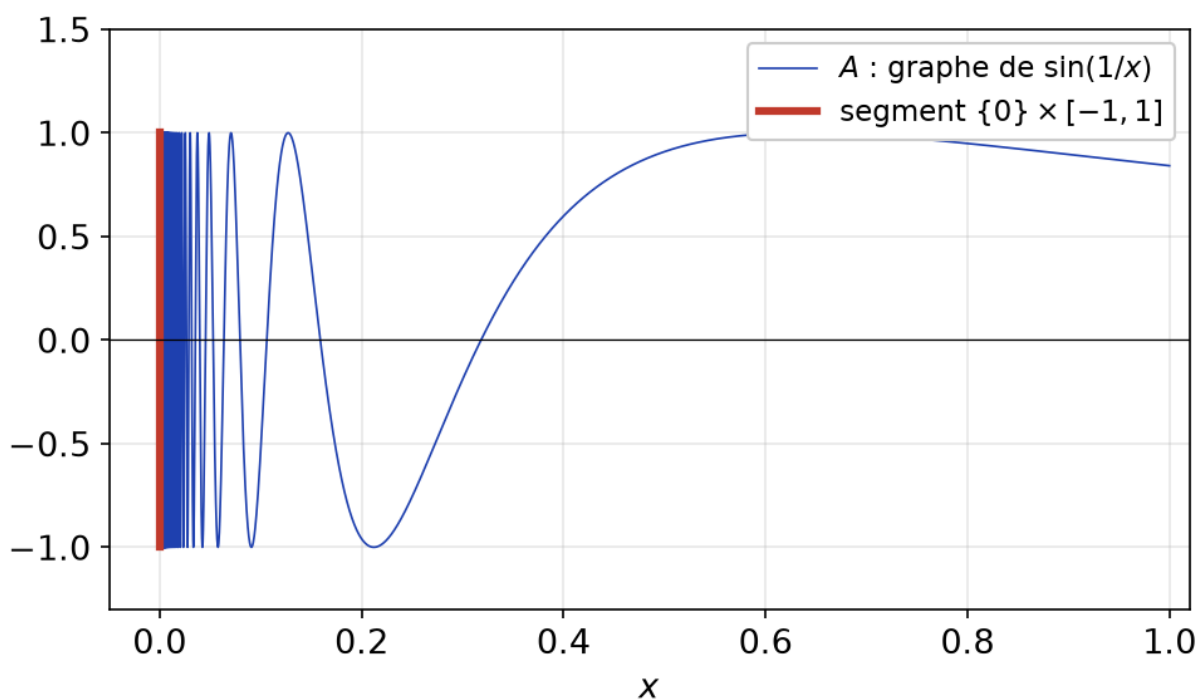
1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.
2. Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $P(z) = \det((1-z)A + zB)$ est un polynôme non nul, qui ne s'annule ni en 0 ni en 1.
3. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_s(t) = t + i s t(1-t)$, $t \in [0,1]$. Montrer que deux chemins γ_s et $\gamma_{s'}$ avec $s \neq s'$ n'ont en commun que leurs extrémités 0 et 1.
4. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
5. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact mais n'est pas connexe.

Exercice 18 : Points fixes et injectivité sur un intervalle

1. Soit $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.
3. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. En considérant $\Delta = \{(x,y) \in I^2 : x < y\}$ et $\varphi(x,y) = f(y) - f(x)$, montrer que f est strictement monotone.

Exercice 19 : Le sinus du topologue

On pose $A = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in]0,1]\}$ et $S = \{0\} \times [-1,1]$ dans $\mathbb{R}^2$. La figure ci-dessous représente A et S .



1. Montrer que A est connexe par arcs.
2. Montrer que $\overline{A} = A \cup S$.
3. En déduire que $\overline{A}$ est connexe.
4. On suppose qu'il existe un chemin continu $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow \overline{A}$ avec $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin 1)$. On pose $t_0 = \sup \left\{ t \in [0, 1] : \gamma_1(t) = 0 \right\}$. Montrer que $\gamma_1(t_0) = 0$, puis que γ_2 prend les valeurs 1 et -1 sur tout intervalle $]t_0, t_0 + \eta]$.
5. Conclure que $\overline{A}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 20 : Problème : théorème de Dini et approximation de la racine carrée

Partie A. Soit K un espace métrique compact et (f_n) une suite de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n et que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue.

1. On pose $g_n = f - f_n$. Montrer que g_n est continue, positive, que (g_n) est décroissante et converge simplement vers 0.
2. Soit $\varepsilon > 0$ et $K_n = \{x \in I; g_n(x) \geq \varepsilon\}$. Montrer que les K_n sont compacts, décroissants, et que leur intersection est vide.
3. En déduire qu'il existe N tel que $K_N = \emptyset$, puis que (f_n) converge uniformément vers f : c'est le théorème de Dini.

Partie B. On définit une suite de polynômes par $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2$.

1. Montrer que $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)$ pour $x \geq 0$.
2. En déduire que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout n .
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(P_n(x))$ est croissante et converge vers $\sqrt{x}$.
4. Conclure que (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{\cdot}$ sur $[0,1]$. En déduire que $x \rightarrow |x|$ est limite uniforme de polynômes sur $[-1,1]$.

Exercice 21 : Nombre de Lebesgue d'un recouvrement

Soit (K, d) un espace métrique compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. On veut montrer, sans suites, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule $B(x, \varepsilon)$, $x \in K$, soit incluse dans l'un des U_i .

1. Justifier qu'on peut se ramener à un recouvrement fini $U_1, \dots, U_p$, avec $U_k \neq K$ pour tout k (sinon le résultat est immédiat).
2. On pose $\phi(x) = \max_{1 \leq k \leq p} d(x, K \setminus U_k)$. Montrer que ϕ est continue et strictement positive sur K .

3. Conclure en posant $\varepsilon = \min_K \phi$.
4. Dédire de ce résultat une nouvelle démonstration du théorème de Heine.
5. Exemple : $K = [0,1]$, $U_1 = [0, \frac{2}{3}[$ et $U_2 =]\frac{1}{3}, 1]$, ouverts de K . Calculer ϕ , puis $\min_K \phi$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [compacité et connexité, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre précédent : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre suivant : [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)