

Compacité et connexité

Corrigé de l'exercice 1 : Parties compactes du plan

L'espace $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie. Ainsi, quelle que soit la norme choisie, ses compacts sont exactement ses fermés bornés. Pour la bornitude, on travaille avec $\|\cdot\|_\infty$, puisque toutes les normes sont équivalentes.

1. L'application $\psi : (x, y) \rightarrow x^2 + 2y^2$ est polynomiale, donc continue. Par conséquent, $A = \psi^{-1}(\{1\})$ est fermé. De plus, si $(x, y) \in A$, alors $x^2 \leq 1$ et $y^2 \leq \frac{1}{2}$, donc $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$. **A est compacte.**
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point (n, n^2) appartient à B . Donc B n'est pas bornée. **B n'est pas compacte.**
3. D'abord, C est l'image réciproque de $] -\infty, 1]$ par l'application continue $(x, y) \rightarrow x^4 + y^4$: elle est fermée. Ensuite, $x^4 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$ donnent $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. **C est compacte.**
4. Les points $(\frac{1}{n}, 0)$ appartiennent à D et convergent vers $(0, 0)$, qui n'est pas dans D . Ainsi D n'est pas fermée. **D n'est pas compacte.**
5. Soit (p_k) une suite de P . Si elle prend une infinité de fois une même valeur, elle possède une sous-suite constante. Sinon, elle prend une infinité de valeurs $(\frac{1}{n_k}, 0)$ distinctes : on peut extraire une sous-suite avec $n_k \rightarrow +\infty$, qui converge vers $(0, 0) \in P$. Donc **P est compacte.**
En revanche, $P \setminus \{(0, 0)\}$ contient la suite $(\frac{1}{n}, 0)$, de limite $(0, 0)$ extérieure à cette partie. Elle n'est pas fermée, donc **$P \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas compacte.**

Corrigé de l'exercice 2 : Borel-Lebesgue à la main

1. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K . Le point 0 appartient à un ouvert U_{i_0} . Il existe donc $r > 0$ tel que $] -r, r[\subset U_{i_0}$. Posons $N = \lfloor \frac{1}{r} \rfloor$. Pour $n > N$, on a $\frac{1}{n} < r$, donc $\frac{1}{n} \in U_{i_0}$. Ensuite, chacun des points $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{N}$ appartient à un ouvert U_{i_n} . Finalement, la famille finie $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$ recouvre K . **K est compacte.**
2. Posons $U_n =]-1, n[$ pour $n \geq 1$. Ces ouverts recouvrent $[0, +\infty[$, car tout réel positif est inférieur à un entier. Cependant, une sous-famille finie a pour réunion $] -1, N[$, où N est le plus grand indice. Elle ne contient pas N . $[0, +\infty[$ **n'est pas compacte.**
3. Posons $r_n = \frac{1}{2n(n+1)}$ et $U_n =]\frac{1}{n} - r_n, \frac{1}{n} + r_n[$. Ces ouverts recouvrent L . Montrons que $U_n \cap L = \{\frac{1}{n}\}$. D'une part, si $m > n$, alors $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - 2r_n < \frac{1}{n} - r_n$. D'autre part, si $m < n$, alors $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n} + r_n$. Par conséquent, une sous-famille finie ne recouvre qu'un nombre fini de points de L , qui est infini. **L n'est pas compacte.**

Point de méthode : pour nier la compacité par les recouvrements, on cherche des ouverts qui « isolent » les points ou qui grandissent sans jamais tout couvrir.

Corrigé de l'exercice 3 : Opérations sur les compacts

1. Soit $K_1, \dots, K_p$ compacts et (U_i) un recouvrement ouvert de leur réunion. Il recouvre en particulier chaque K_j . On extrait donc, pour chaque j , une sous-famille finie J_j qui recouvre K_j . Ainsi, la famille indexée par $J_1 \cup \dots \cup J_p$, finie, recouvre la réunion. **Une réunion finie de compacts est compacte.**
2. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille non vide de compacts. Chaque K_i est fermé, car un compact d'un espace métrique est fermé. Donc $\bigcap_i K_i$ est fermé. De plus, il est contenu dans K_{i_0} pour un indice i_0 fixé. Or un fermé contenu dans un compact est compact. **L'intersection est compacte.**

3. L'application p est linéaire sur $\mathbb{R}^2$, de dimension finie, donc continue. On peut aussi l'écrire $|p(x,y) - p(x',y')| \leq |(x) - (x',y')|_{\infty}$. Par conséquent, $p(K)$ **est compact comme image continue d'un compact**.
4. L'application $(x,y) \rightarrow xy$ est continue, donc H , image réciproque de $\{1\}$, est fermé. Ensuite, si $xy = 1$, alors $x \neq 0$. Réciproquement, tout $x \neq 0$ est la projection de $(x, \frac{1}{x}) \in H$. Ainsi $p(H) = \mathbb{R}^*$. Or $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin \mathbb{R}^*$: $p(H) = \mathbb{R}^*$ **n'est pas fermé**. Il n'y a pas de contradiction avec la question 3, car H n'est pas borné.

Corrigé de l'exercice 4 : Somme d'un compact et d'un fermé

1. La partie $K \times L$ est compacte dans $E \times E$, comme produit de compacts. L'application $s : (x,y) \rightarrow x + y$ est continue, car $|s(x,y) - s(x',y')| \leq |x - x'| + |y - y'|$. Or $K + L = s(K \times L)$. **Donc $K + L$ est compact**.
2. Soit (z_n) une suite de $K + F$ qui converge vers z . On écrit $z_n = k_n + f_n$, avec $k_n \in K$ et $f_n \in F$. Par compacité de K , une sous-suite $(k_{\varphi(n)})$ converge vers $k \in K$. Alors $f_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - k_{\varphi(n)} \rightarrow z - k$. Comme F est fermé, $z - k \in F$. Ainsi $z = k + (z - k) \in K + F$. **$K + F$ est fermé**.
3. D'abord, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n \geq 0}]n, n+1[$ est ouvert, donc F est fermé. Ensuite, posons $g_m = -m + \frac{1}{m+1}$. On a $g_{m+1} - g_m = -1 + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1} < 0$ et $g_m \rightarrow -\infty$. Soit (g_{m_k}) une suite de G convergeant vers ℓ . Elle est bornée, donc les indices m_k sont bornés. Elle ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs, et l'une d'elles est prise une infinité de fois : ℓ est égal à cette valeur, donc $\ell \in G$. Ainsi G est fermé. Supposons $n + g_m = 0$ avec $n, m \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{1}{m+1} = m - n$ est un entier appartenant à $]0, 1]$. Donc $\frac{1}{m+1} = 1$, c'est-à-dire $m = 0$, puis $n = -1$: c'est impossible. Ainsi $0 \notin F + G$. En revanche, avec $n = m$, on obtient $m + g_m = \frac{1}{m+1} \in F + G$, qui tend vers 0 . **Donc $F + G$ n'est pas fermé : la somme de deux fermés n'est pas toujours fermée**. La compacité de K est donc indispensable à la question 2.

Corrigé de l'exercice 5 : Distance à un compact

1. L'application $y \rightarrow |x - y|$ est 1-lipschitzienne, donc continue. Sur le compact non vide K , elle atteint son minimum en un point y_0 . **Ainsi** $|x - y_0| = d(x, K)$.
2. L'application $(x, y) \rightarrow |x - y|$ est continue sur $K \times L$, qui est compact et non vide. Elle atteint donc son minimum en (x_0, y_0) . Comme $K \cap L = \emptyset$, on a $x_0 \neq y_0$. **Donc** $d(K, L) = |x_0 - y_0| > 0$.
3. La fonction $h : x \rightarrow d(x, F)$ est 1-lipschitzienne. Soit $x \in K$. Si $h(x) = 0$, alors $x \in \overline{F} = F$, ce qui est exclu. Donc $h > 0$ sur K . Par compacité, h atteint sur K un minimum $m > 0$. Or $d(K, F) = \inf_{x \in K} d(x, F) = m$. **Donc** $d(K, F) > 0$.
4. D'abord, F_1 est fermé, image réciproque de $\{0\}$ par $(x, y) \rightarrow y$. Ensuite, $F_2 = \{(x, y) : xy = 1\} \cap \{(x, y) : x \geq 0\}$, car $xy = 1$ interdit $x = 0$. C'est une intersection de fermés. Les deux parties sont disjointes, puisque $\frac{1}{x} \neq 0$. Enfin, $d(F_1, F_2) \leq |(n, 0) - (n, \frac{1}{n})| = \frac{1}{n} |(0, 1)|$, qui tend vers 0. **Donc** $d(F_1, F_2) = 0$: **aucun des deux fermés n'est compact.**

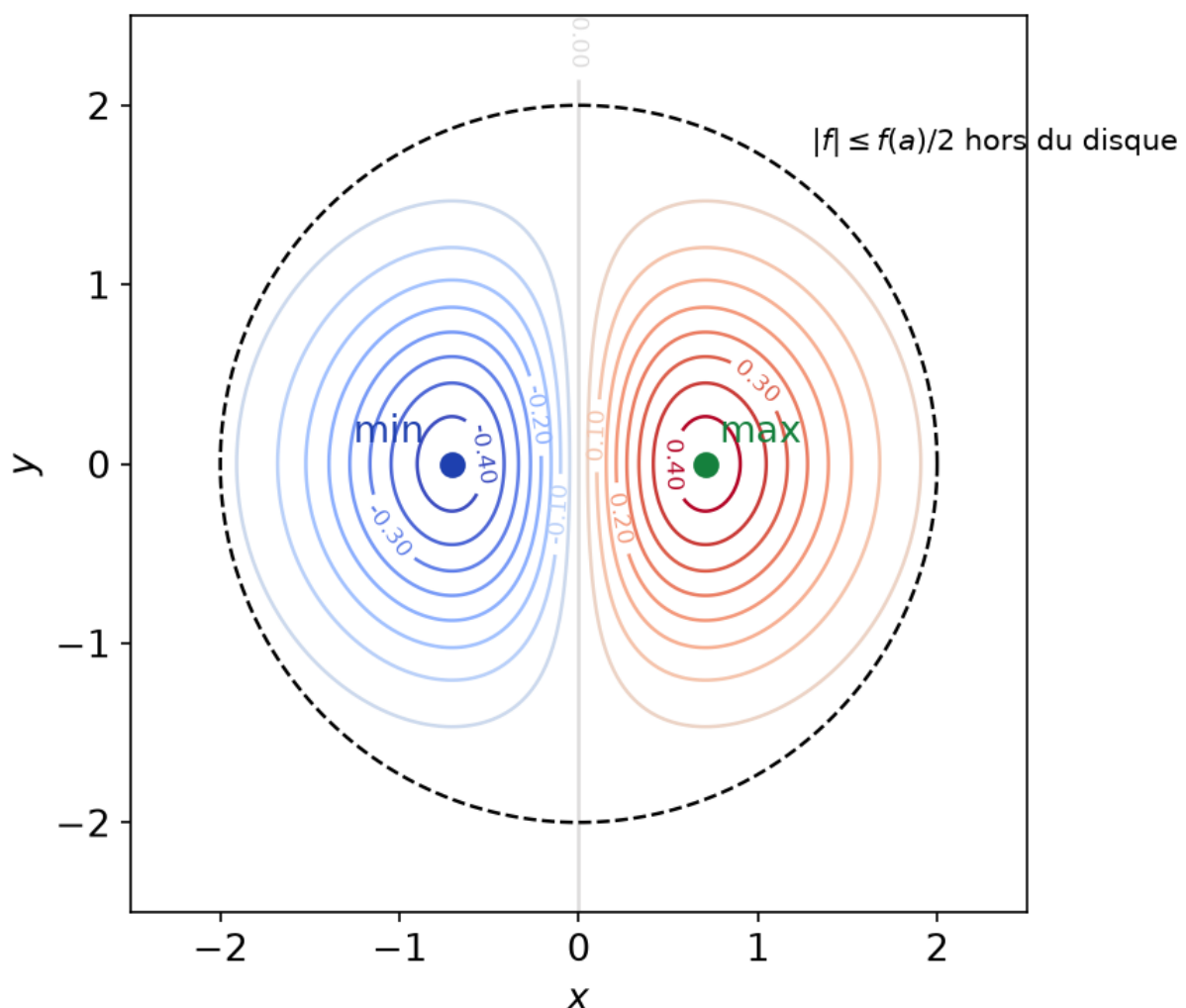
Corrigé de l'exercice 6 : Maximum d'une fonction sur le plan

1. On a $|x| \leq r$ et $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$. Donc $|f(x, y)| \leq r e^{-r^2}$. Par croissances comparées, $r e^{-r^2} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$. **Ainsi** $f(x, y) \rightarrow 0$ à l'infini.
2. Posons $a = (1, 0)$: $f(a) = e^{-1} > 0$. La fonction $\rho : r \rightarrow r e^{-r^2}$ a pour dérivée $(1 - 2r^2)e^{-r^2}$. Elle décroît donc sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$. Pour $r \geq 2$, on obtient $|f| \leq 2e^{-4} \approx 0,037$, qui est inférieur à $\frac{f(a)}{2} \approx 0,184$. Ensuite, le disque euclidien fermé $\overline{B}(0, 2)$ est fermé et borné en dimension finie, donc compact. La fonction f , continue, y atteint un maximum M en un point b . Comme a est dans ce disque, $M \geq e^{-1}$. Hors du disque, $f \leq 2e^{-4} < M$. Par conséquent, **M est le maximum global de f sur $\mathbb{R}^2$** . Enfin, $f(-x, y) = -f(x, y)$, donc **f admet aussi un minimum global, égal à $-M$** .
3. En un extremum global b , intérieur à $\mathbb{R}^2$, chaque fonction partielle $t \rightarrow f(b + t e_k)$ admet un extremum en 0. Les dérivées partielles s'annulent donc en b . Or :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - 2x^2) e^{-(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy e^{-(x^2+y^2)}.$$

La première s'annule si et seulement si $x^2 = \frac{1}{2}$. Alors $x \neq 0$, et la seconde impose $y = 0$. Les seuls candidats sont $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, où f vaut $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}e}$. **Le maximum vaut $\frac{1}{\sqrt{2}e}$, atteint en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; le minimum vaut $-\frac{1}{\sqrt{2}e}$, atteint en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.**

La figure ci-dessous montre les lignes de niveau de f . Le cercle de rayon 2 délimite le compact utilisé ; au-delà, f reste très proche de 0.



Point de méthode : la compacité donne l'existence de l'extremum ; le calcul des points critiques ne sert qu'ensuite, pour le localiser.

Corrigé de l'exercice 7 : Équivalence des normes en dimension finie

- Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Pour $x = \sum_k x_k e_k$, l'inégalité triangulaire donne $N(x) \leq \sum_k |x_k| N(e_k) \leq \beta |x|_\infty$, avec $\beta = \sum_k N(e_k) > 0$. Par conséquent, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq \beta |x - y|_\infty$: N est lipschitzienne, donc continue pour $\|\cdot\|_\infty$. Ensuite, la sphère $S_\infty = \{x : |x|_\infty = 1\}$ est fermée et bornée dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass appliquée coordonnée par coordonnée, elle est compacte. Ainsi, N atteint sur S_∞ un minimum $\alpha = N(x_0)$. Comme $x_0 \neq 0$, on a $\alpha > 0$. Enfin, pour $x \neq 0$, $N(x) = |x|_\infty N(\frac{x}{|x|_\infty}) \geq \alpha |x|_\infty$. **Donc** $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq N \leq \beta \|\cdot\|_\infty$.
- La borne supérieure est finie, car $|P|$ est continue sur le compact $[0,1]$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se vérifient point par point, puis on passe au sup. De plus, si $N_\infty(P) = 0$, alors P s'annule sur $[0,1]$, ensemble infini : donc $P = 0$. Ainsi N_∞ est une norme. Enfin, pour $t \in [0,1]$, $|P(t)| \leq \sum |a_k| t^k \leq \sum |a_k|$. **Donc** $N_\infty \leq N_1$.
- L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$. Les restrictions de N_1 et N_∞ y sont des normes. **Elles sont donc équivalentes, d'après le théorème d'équivalence des normes en dimension finie.**
- Par la formule du binôme, $(X-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. Donc $N_1((X-1)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Ensuite, $|t-1|^n = (1-t)^n$ décroît sur $[0,1]$ et vaut 1 en 0 : $N_\infty((X-1)^n) = 1$. Supposons $N_1 \leq \gamma N_\infty$ sur $\mathbb{R}[X]$. On obtiendrait $2^n \leq \gamma$ pour tout n , ce qui est absurde. **Donc N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$.** En particulier, la constante de la question 3 dépend de n et est au moins 2^n .

Corrigé de l'exercice 8 : Continuité uniforme et théorème de Heine

- La fonction racine carrée est continue sur le segment $[0,1]$, qui est compact. **D'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue.**

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geq A$. Ensuite, f est continue sur le compact $[0, A+1]$, donc uniformément continue : il existe $\delta_0 > 0$ adapté à ε . Posons $\delta = \min(\delta_0, 1)$ et soit $x, y \geq 0$ avec $|x - y| < \delta$. Si $x, y \geq A$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| \leq \varepsilon$. Sinon, l'un des deux est inférieur à A , donc les deux sont dans $[0, A+1]$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. **Ainsi f est uniformément continue.**
3. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine sur $[0, 2T]$, il existe δ_0 adapté à ε . Posons $\delta = \min(\delta_0, T)$ et soit $x \leq y$ avec $y - x < \delta$. Notons $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$, $x' = x - kT \in [0, T[$ et $y' = y - kT$. Alors $y' \in [x', x' + T[\subset [0, 2T[$ et $|x' - y'| < \delta_0$. Par périodicité, $|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| < \varepsilon$. **Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**
4. Posons $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$. Alors $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mais $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. Ainsi, pour $\varepsilon = 2$, aucun δ ne convient. **La fonction carré n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Sphère unité de $C([0,1])$ non compacte

1. La fonction f_n est continue, et $0 \leq x^n \leq 1$ sur $[0,1]$, avec égalité à 1 en $x = 1$. **Donc $|f_n|_\infty = 1$.**
2. Supposons que $f_{\varphi(k)} \rightarrow g$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Or $x^{\varphi(k)} \rightarrow 0$ pour $x \in [0,1[$ et $1^{\varphi(k)} = 1$. Donc g vaut 0 sur $[0,1[$ et 1 en 1. Cette fonction n'est pas continue, alors que $g \in E$. **Aucune sous-suite de (f_n) ne converge.**
3. Posons $u = x^n$. Quand x parcourt $[0,1]$, u parcourt $[0,1]$, et $f_n(x) - f_{2n}(x) = u - u^2$. Cette fonction de u atteint son maximum $\frac{1}{4}$ en $u = \frac{1}{2}$ et reste positive. **Donc $|f_n - f_{2n}|_\infty = \frac{1}{4}$.** En particulier, la sous-suite (f_{2k}) n'est pas de Cauchy.
4. La sphère unité contient la suite (f_n) , sans sous-suite convergente : elle n'est pas compacte. De plus, elle est fermée, image réciproque de $\{1\}$ par la norme. Si la boule fermée était compacte, la sphère, fermée dans cette boule, le serait aussi. **Donc ni la sphère ni la boule unité fermée ne sont compactes.** On retrouve le théorème de Riesz : E est de dimension infinie, car les f_n sont linéairement indépendantes.

Corrigé de l'exercice 10 : Suite ayant une seule valeur d'adhérence

- Supposons que (x_n) ne converge pas vers a . Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une extraction ψ telle que $d(x_{\psi(n)}, a) \geq \varepsilon$ pour tout n . La suite $(x_{\psi(n)})$ vit dans K , compact. Elle admet donc une sous-suite convergeant vers un point b . Par passage à la limite, $d(b, a) \geq \varepsilon$, donc $b \neq a$. Or b est une valeur d'adhérence de (x_n) . C'est une contradiction. **Donc $x_n \rightarrow a$.**
- Les termes pairs sont nuls : 0 est valeur d'adhérence. Soit ℓ une valeur d'adhérence, limite de $(x_{\varphi(n)})$. Cette sous-suite est bornée, donc elle ne contient qu'un nombre fini d'indices impairs. À partir d'un certain rang, elle est nulle, donc $\ell = 0$. Ainsi 0 est l'unique valeur d'adhérence. Pourtant, (x_n) n'est pas bornée et ne converge pas. **L'hypothèse de compacité est indispensable.**
- Soit $x_n \rightarrow x$ dans $[0, 1]$. La suite $(f(x_n))$ est à valeurs dans le compact $[0, 1]$. Soit b une de ses valeurs d'adhérence, limite de $f(x_{\varphi(n)})$. Alors $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})) \rightarrow (x, b)$. Comme Γ est fermé, $(x, b) \in \Gamma$, donc $b = f(x)$. Par la question 1, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. **Par caractérisation séquentielle, f est continue.**

Corrigé de l'exercice 11 : Point fixe d'une application contractante au sens large

- D'abord, f est 1-lipschitzienne, donc continue. Ensuite, par inégalité triangulaire :

$$|g(x) - g(y)| \leq d(x, y) + d(f(x), f(y)) \leq 2 d(x, y).$$

Ainsi g est continue sur K , compact non vide. **Elle atteint son minimum en un point c .**

- Supposons $f(c) \neq c$. Alors $g(f(c)) = d(f(c), f(f(c))) < d(c, f(c)) = g(c)$, ce qui contredit la minimalité de $g(c)$. Donc $f(c) = c$. Ensuite, si $c' \neq c$ était un autre point fixe, on aurait $d(c, c') = d(f(c), f(c')) < d(c, c')$. C'est absurde. **Donc c est l'unique point fixe de f .**
- Posons $u_n = d(x_n, c)$. Comme $c = f(c)$, on a $u_{n+1} = d(f(x_n), f(c)) \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante et positive : elle converge vers $\ell \geq 0$. Supposons $\ell > 0$. Par

compacité, une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers b . Par continuité, $d(b,c) = \ell$ et $x_{\varphi(n)+1} = f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(b)$. Donc $d(f(b),c) = \lim u_{\varphi(n)+1} = \ell$. Or $b \neq c$, donc $d(f(b),c) = d(f(b),f(c)) < d(b,c) = \ell$. C'est une contradiction. **Ainsi $\ell = 0$ et $x_n \rightarrow c$.**

4. D'abord, $\sin([0,1]) = [0, \sin 1] \subset [0,1]$. Soit $x \neq y$ dans $[0,1]$. Par l'égalité des accroissements finis, $\sin x - \sin y = \cos \xi (x - y)$, avec ξ strictement compris entre x et y . Donc $\xi \in]0,1[$ et $0 < \cos \xi < 1$. Par conséquent, $|\sin x - \sin y| < |x - y|$. En revanche, $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$. Aucune constante $k < 1$ ne convient. Le point fixe est 0 , puisque $\sin x < x$ pour $x > 0$. **D'après la question 3, pour tout $x_0 \in [0,1]$, la suite définie par $x_{n+1} = \sin x_n$ converge vers 0 .**

Point de méthode : sans constante $k < 1$, le théorème du point fixe de Banach ne s'applique pas ; la compacité le remplace.

Corrigé de l'exercice 12 : Isométries d'un compact

- Une isométrie est 1-lipschitzienne, donc continue. Ainsi $f(K)$ est compact, donc fermé. Comme $a \notin f(K)$, on a $d(a, f(K)) > 0$: sinon a serait adhérent à $f(K)$, donc dans $f(K)$. **Ainsi $\delta > 0$.**
- On a $a_n = f^n(a)$, où f^n est la composée n fois de f . C'est encore une isométrie. Donc $d(a_n, a_{n+k}) = d(f^n(a), f^n(a_k)) = d(a, a_k)$. Or, pour $k \geq 1$, $a_k = f(a_{k-1}) \in f(K)$. **Donc $d(a_n, a_{n+k}) = d(a, a_k) \geq \delta$.**
- La suite (a_n) vit dans K , compact. Elle admet une sous-suite convergente, donc de Cauchy. Il existe ainsi $p < q$ tels que $d(a_{\varphi(p)}, a_{\varphi(q)}) < \delta$. Cela contredit la question 2. **Par conséquent, f est surjective.** De plus, une isométrie est injective, car $f(x) = f(y)$ impose $d(x,y) = 0$. Donc f est bijective. Sa réciproque est aussi une isométrie, donc continue. **Finalement, f est un homéomorphisme de K sur K .**
- L'application $x \rightarrow x + 1$ conserve les distances sur $[0, +\infty[$. Cependant, son image est $[1, +\infty[$: elle n'est pas surjective. **Le résultat tombe en défaut car $[0, +\infty[$ n'est pas compact.**

Corrigé de l'exercice 13 : Parties connexes de $\mathbb{R}$

On utilise le théorème : les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, c'est-à-dire les parties A telles que $a, b \in A$ et $a < c < b$ impliquent $c \in A$.

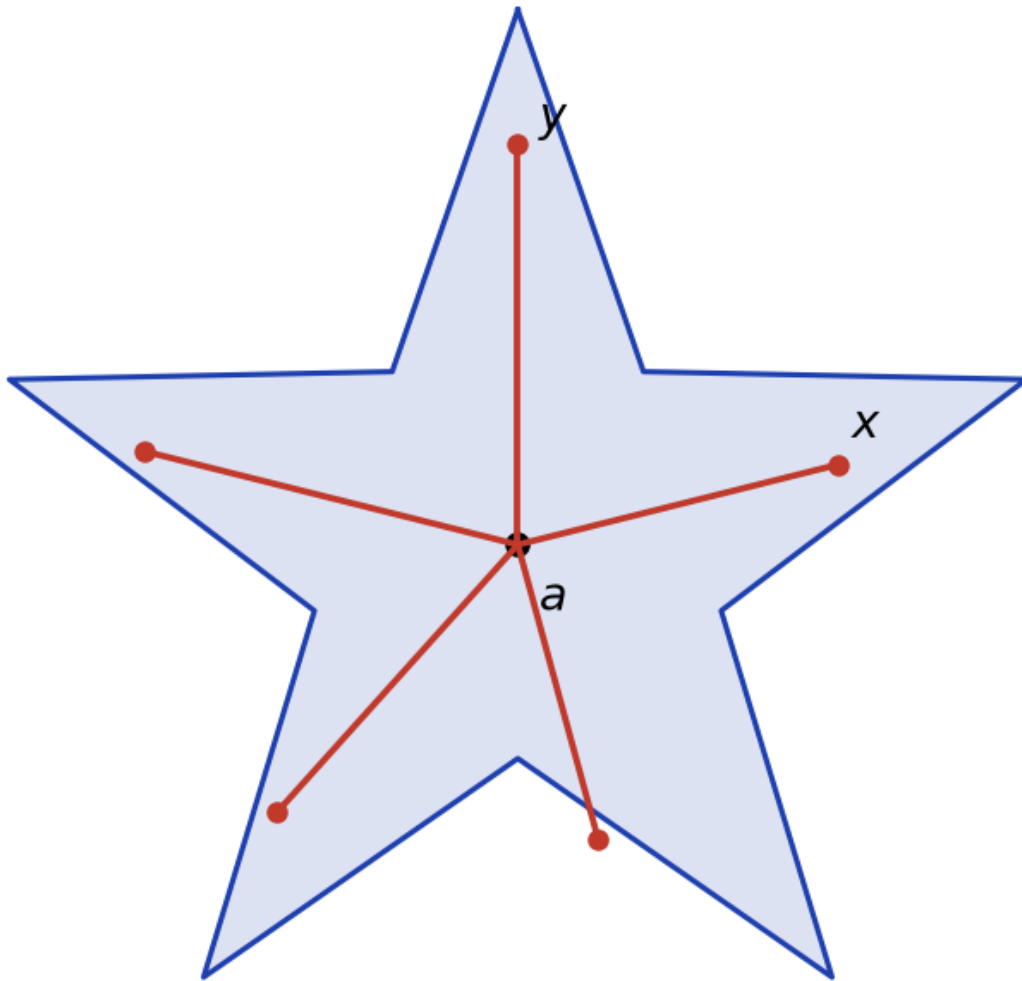
1. On a $0, 2 \in \mathbb{Q}$ et $0 < \sqrt{2} < 2$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Concrètement, $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$ et $\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[$ partitionnent $\mathbb{Q}$ en deux ouverts non vides. $\mathbb{Q}$ **n'est pas connexe.**
2. On a $1 < \frac{3}{2} < 2$, avec $1, 2$ dans la partie et $\frac{3}{2}$ hors d'elle. $[0, 1] \cup [2, 3]$ **n'est pas connexe.**
3. On a $\frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2}$, avec $1 \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ **n'est pas connexe.**
4. On a $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. **La partie est l'intervalle $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, donc elle est connexe.**
5. La fonction h est continue et impaire. Pour $x \geq 0$, $h(x) = \frac{x}{1+x} \in [0, 1[$. Réciproquement, pour $y \in [0, 1[$, le réel $x = \frac{y}{1-y} \geq 0$ vérifie $h(x) = y$. Par imparité, $h(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. **C'est un intervalle, donc un connexe, comme image continue du connexe $\mathbb{R}$.**

Corrigé de l'exercice 14 : Parties connexes par arcs du plan

1. Soit x, y dans le disque et $t \in [0, 1]$. Alors $|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y| \leq 1$. Le chemin $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ est continu et reste dans le disque. **Le disque fermé, convexe, est connexe par arcs.**
2. Soit $x, y \in A$. On définit $\gamma(t) = (1-2t)x + 2ta$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, puis $\gamma(t) = (2-2t)a + (2t-1)y$ pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Les deux formules donnent a en $t = \frac{1}{2}$, donc γ est continue. De plus, γ parcourt $[x, a]$ puis $[a, y]$, segments inclus dans A . **Une partie étoilée est connexe par arcs.**

La figure ci-dessous illustre la question 2 : dans une étoile, on relie deux points quelconques en passant

par le centre a .



segments $[a, x]$ et $[a, y]$ puis chemin $x \rightarrow a \rightarrow y$

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si $0 \notin [x, y]$, le segment convient. Sinon, $y = -\lambda x$ avec $\lambda > 0$. Comme $n \geq 2$, il existe z non colinéaire à x . Alors $0 \notin [x, z]$ et $0 \notin [z, y]$, car z n'est colinéaire ni à x ni à y . Le chemin $x \rightarrow z \rightarrow y$ convient. Ainsi $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs. Ensuite, $\nu : x \rightarrow \frac{x}{|x|_2}$ est continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et vaut l'identité sur S : ν est surjective sur S . Si γ relie x à y , alors $\nu \circ \gamma$ relie $\nu(x)$ à $\nu(y)$. **La sphère S est connexe par arcs.**
4. La projection $p : (x, y) \rightarrow x$ est continue et $p(H) = \mathbb{R}^*$ (exercice 3). Si H était connexe, $\mathbb{R}^*$ le serait aussi. Or $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. **H n'est pas connexe.**

5. Le graphe est l'image de I par $x \rightarrow (x, \varphi(x))$, qui est continue. Or I est convexe, donc connexe par arcs. En composant les chemins comme à la question 3, **le graphe de φ est connexe par arcs.**

Corrigé de l'exercice 15 : Espaces non homéomorphes

1. Supposons qu'un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existe. D'après l'exercice 14, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs, donc connexe. Sa restriction $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ est continue et surjective. Donc $\mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ serait connexe. Or ce n'est pas un intervalle. **$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.**
2. Supposons qu'un homéomorphisme $h : S^1 \rightarrow [0,1]$ existe, et soit $z_0 = e^{i\theta_0}$ l'antécédent de $\frac{1}{2}$. Alors $S^1 \setminus \{z_0\}$ est l'image de l'intervalle $] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ par $\theta \rightarrow e^{i\theta}$, continue : elle est connexe. Son image par h est $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, qui n'est pas connexe. **Le segment et le cercle ne sont pas homéomorphes.**
3. Supposons qu'un homéomorphisme $h : [0,1[\rightarrow]0,1[$ existe. Alors $[0,1[\setminus \{0\} =]0,1[$ est connexe. Son image $]0,1[\setminus \{h(0)\}$ serait connexe. Or $h(0) \in]0,1[$, et cette partie n'est pas un intervalle. **$]0,1[$ et $[0,1[$ ne sont pas homéomorphes.**

Point de méthode : un homéomorphisme envoie une partie privée d'un point sur l'image privée de l'image de ce point ; la connexité est alors un invariant qui distingue les espaces.

Corrigé de l'exercice 16 : Fonctions continues à valeurs discrètes

1. Vue comme fonction à valeurs réelles, f est continue. Donc $f(A)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle. Or cet intervalle est contenu dans $\mathbb{Z}$. S'il contenait deux entiers $m < n$, il contiendrait $m + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. **Donc $f(A)$ est un singleton : f est constante.**
2. On a $f(\mathbb{R}) \subset \{-1,1\}$. Or $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires.

C'est donc un singleton, et f est constante (égale à 1 ou à -1).

3. L'image $f(\mathbb{R})$ est un intervalle contenu dans $\mathbb{Q}$. Un intervalle non réduit à un point contient des irrationnels. **Donc f est constante.**
4. Fixons $a \in U$ et posons $C = \{x \in U : f(x) = f(a)\}$. D'abord, $a \in C$. Ensuite, si $x \in C$, f est constante égale à $f(x) = f(a)$ sur un voisinage de x : ce voisinage est dans C , donc C est ouvert. De même, si $x \notin C$, f vaut $f(x) \neq f(a)$ près de x : $U \setminus C$ est ouvert. Ainsi C est ouvert et fermé dans U , non vide. **Par connexité de U , $C = U$: f est constante.**
5. La fonction vaut -1 sur $]-\infty, 0[$ et 1 sur $]0, +\infty[$. Elle est bien localement constante. **Cependant, $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe : l'hypothèse de connexité de la question 4 n'est pas satisfaite.**

Corrigé de l'exercice 17 : Connexité de $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$

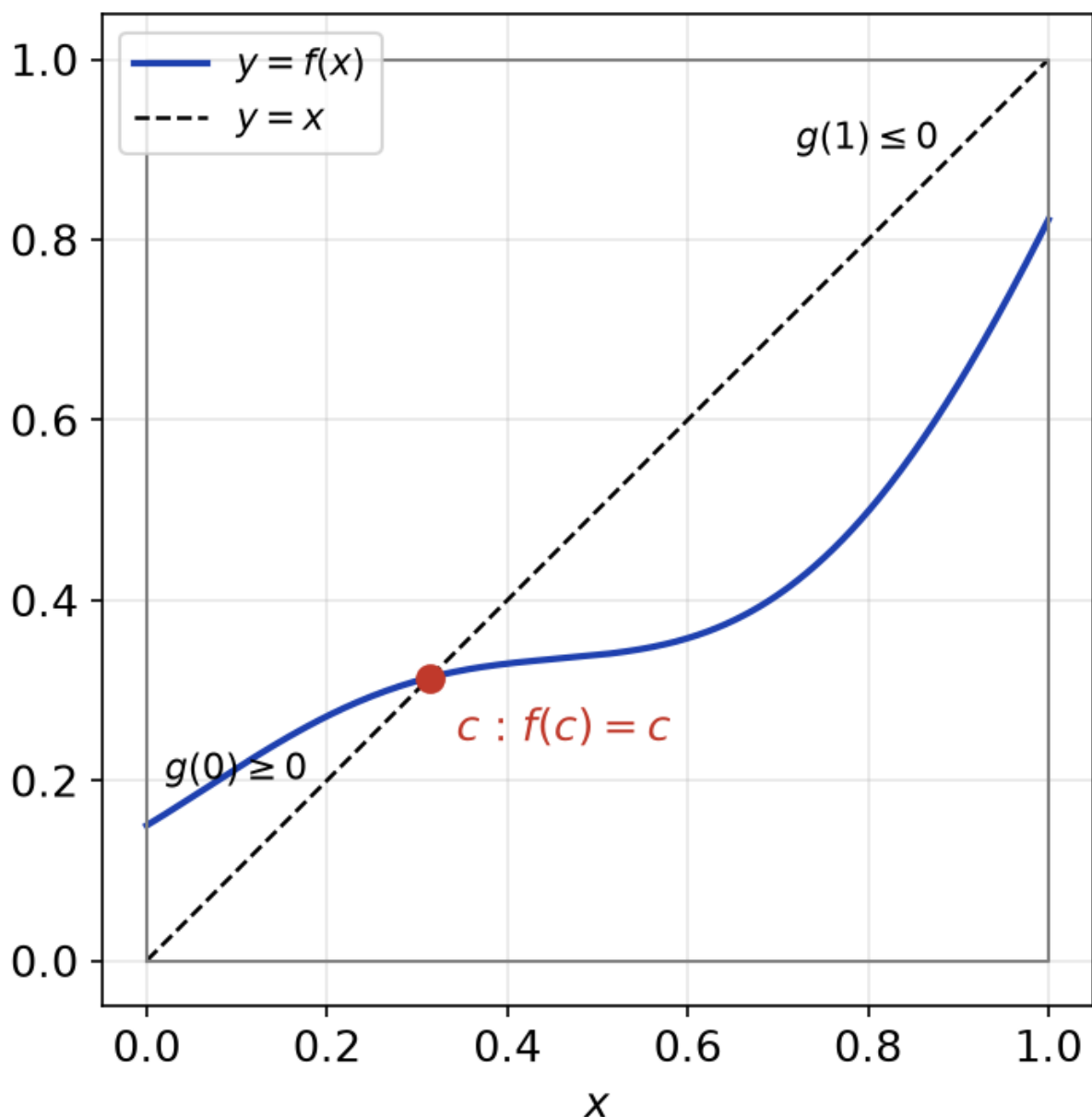
1. Le déterminant est polynomial en les coefficients, donc continu. De plus, $\det(\text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)) = \lambda$, donc $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$. Si $GL_n(\mathbb{R})$ était connexe, son image $\mathbb{R}^*$ le serait. **Ce n'est pas le cas : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.**
2. Les coefficients de $(1-z)A + zB$ sont des fonctions affines de z . Le déterminant, polynomial en ces coefficients, est donc un polynôme en z , de degré au plus n . De plus, $P(0) = \det A \neq 0$ et $P(1) = \det B \neq 0$. **Ainsi P est un polynôme non nul, qui ne s'annule ni en 0 ni en 1.**
3. Supposons $\gamma_s(t) = \gamma_{s'}(t')$. En identifiant les parties réelles, $t = t'$. En identifiant les parties imaginaires, $(s - s')t(1-t) = 0$. Comme $s \neq s'$, on obtient $t \in \{0, 1\}$. **Les deux chemins n'ont en commun que les points 0 et 1.**
4. Le polynôme P a un nombre fini de racines $z_1, \dots, z_m$, toutes distinctes de 0 et 1. D'après la question 3, chaque z_j appartient à au plus un chemin γ_s . Il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs de s à exclure. On choisit un s restant. Le chemin $\Gamma(t) = (1 - \gamma_s(t))A + \gamma_s(t)B$ est continu, avec $\Gamma(0) = A$ et $\Gamma(1) = B$. De plus, $\det \Gamma(t) = P(\gamma_s(t)) \neq 0$. **Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.**
5. On a $O_n(\mathbb{R}) = \{M : M^T M = I_n\}$, image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue $M \rightarrow M^T M$: c'est un fermé. Ensuite, les colonnes d'une matrice orthogonale sont unitaires, donc tous ses coefficients sont dans $[-1, 1]$. Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est borné. En dimension

finie, il est donc compact. Enfin, $\det M = \pm 1$ pour M orthogonale, et les deux valeurs sont atteintes par I_n et $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. L'image par le déterminant, $\{-1, 1\}$, n'est pas un intervalle. **Donc $O_n(\mathbb{R})$ est compact mais pas connexe.**

Corrigé de l'exercice 18 : Points fixes et injectivité sur un intervalle

1. Posons $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[a, b]$. Comme f est à valeurs dans $[a, b]$, on a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, **il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.**

La figure ci-dessous illustre cet argument. Le graphe de f part au-dessus de la diagonale et finit en dessous : il la coupe forcément.



2. Posons $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$. La fonction g est continue. De plus :
- $$g(0) + g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(0) + f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(0) = 0.$$

Donc $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ sont de signes opposés, ou nuls. **Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.**

3. On suppose I non réduit à un point. Alors Δ est non vide et convexe. En effet, si $x < y$ et $x' < y'$, alors $(1-t)x + tx' < (1-t)y + ty'$, et ces réels restent dans l'intervalle I . Donc Δ est connexe par arcs, donc connexe. Ensuite, φ est continue et ne s'annule pas sur Δ , par injectivité de f . Par conséquent, $\varphi(\Delta)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. Il est inclus dans $]0, +\infty[$ ou dans $]-\infty, 0[$. **Dans le premier cas, f est strictement**

croissante ; dans le second, strictement décroissante.

Corrigé de l'exercice 19 : Le sinus du topologue

1. L'ensemble A est l'image de l'intervalle $]0,1]$ par $x \rightarrow (x, \sin \frac{1}{x})$, continue. Un chemin de $]0,1]$, composé par cette application, donne un chemin dans A . **Donc A est connexe par arcs.**
2. Montrons d'abord $S \subset \overline{A}$. Soit $y \in [-1,1]$ et $\theta = \arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Posons $x_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi}$ pour $n \geq 1$. Comme $\theta + 2n\pi \geq 2\pi - \frac{\pi}{2} > 1$, on a $x_n \in]0,1[$. De plus, $\sin \frac{1}{x_n} = \sin \theta = y$. Ainsi $(x_n, y) \in A$ tend vers $(0, y)$. Donc $A \cup S \subset \overline{A}$.
Réciproquement, soit $(x_n, \sin \frac{1}{x_n}) \rightarrow (u, v)$, avec $x_n \in]0,1]$. Alors $u \in [0,1]$ et $v \in [-1,1]$. Si $u > 0$, la continuité de $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ en u donne $v = \sin \frac{1}{u}$, donc $(u, v) \in A$. Si $u = 0$, alors $(u, v) \in S$. **Finalement, $\overline{A} = A \cup S$.**
3. On a $A \subset \overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$, et A est connexe, car connexe par arcs. **D'après la propriété d'adhérence du cours, $\overline{A}$ est connexe.**
4. L'ensemble $T = \{t : \gamma_1(t) = 0\}$ contient 0 et il est fermé, par continuité de γ_1 . Donc $t_0 = \sup T \in T$, c'est-à-dire $\gamma_1(t_0) = 0$. Comme $\gamma_1(1) = 1$, on a $t_0 < 1$. Pour $t > t_0$, $\gamma_1(t) \neq 0$, donc $\gamma(t) \notin S$: ainsi $\gamma(t) \in A$ et $\gamma_2(t) = \sin \frac{1}{\gamma_1(t)}$, avec $\gamma_1(t) > 0$.
Soit $\eta \in]0, 1 - t_0]$ et $u = \gamma_1(t_0 + \eta) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\gamma_1([t_0, t_0 + \eta])$ contient $[0, u]$. Choisissons un entier $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} < u$. Il existe alors $t, t' \in]t_0, t_0 + \eta]$ tels que $\gamma_1(t) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ et $\gamma_1(t') = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$. Ces instants diffèrent de t_0 , puisque $\gamma_1(t_0) = 0$. **On obtient $\gamma_2(t) = 1$ et $\gamma_2(t') = -1$.**
5. Par continuité de γ_2 en t_0 , il existe $\eta > 0$ tel que $|\gamma_2(s) - \gamma_2(t_0)| < \frac{1}{2}$ pour $s \in [t_0, t_0 + \eta]$. Avec t et t' de la question 4, on aurait :
$$2 = |\gamma_2(t) - \gamma_2(t')| \leq |\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)| + |\gamma_2(t_0) - \gamma_2(t')| < 1.$$

C'est absurde. Aucun chemin ne relie $(0,0)$ à $(1, \sin 1)$ dans $\overline{A}$. **Ainsi $\overline{A}$ est connexe mais pas connexe par arcs.**

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : théorème de Dini et approximation de la racine carrée

Partie A.

1. La fonction g_n est continue comme différence de fonctions continues. Pour x fixé, la suite $(f_n(x))$ est croissante et converge vers $f(x)$. Elle est donc majorée par sa limite : $f_n(x) \leq f(x)$, soit $g_n \geq 0$. De plus, $g_{n+1} = f - f_{n+1} \leq f - f_n = g_n$. **Enfin, $g_n(x) \rightarrow 0$ pour tout x .**
2. On a $K_n = g_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$, fermé de K par continuité. Un fermé d'un compact est compact. Ensuite, si $g_{n+1}(x) \geq \varepsilon$, alors $g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \geq \varepsilon$: donc $K_{n+1} \subset K_n$. Enfin, un point x de l'intersection vérifierait $g_n(x) \geq \varepsilon$ pour tout n , ce qui contredit $g_n(x) \rightarrow 0$. **Les K_n sont des compacts décroissants d'intersection vide.**
3. Supposons tous les K_n non vides. Choisissons $x_n \in K_n$; une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $x \in K$. Pour m fixé et $\varphi(n) \geq m$, on a $x_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)} \subset K_m$. Comme K_m est fermé, $x \in K_m$. Ainsi x serait dans l'intersection, qui est vide. Donc il existe N tel que $K_N = \emptyset$, puis $K_n = \emptyset$ pour $n \geq N$. Autrement dit, $0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$ pour tout $x \in K$ et tout $n \geq N$. **Donc $\sup_K |f - f_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$: la convergence est uniforme.**

Partie B.

1. Pour $x \geq 0$, on écrit $x - P_n^2 = (\sqrt{x} - P_n)(\sqrt{x} + P_n)$. Donc :

$$\sqrt{x} - P_{n+1} = (\sqrt{x} - P_n) - \frac{(\sqrt{x} - P_n)(\sqrt{x} + P_n)}{2} = (\sqrt{x} - P_n) \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n}{2}\right).$$

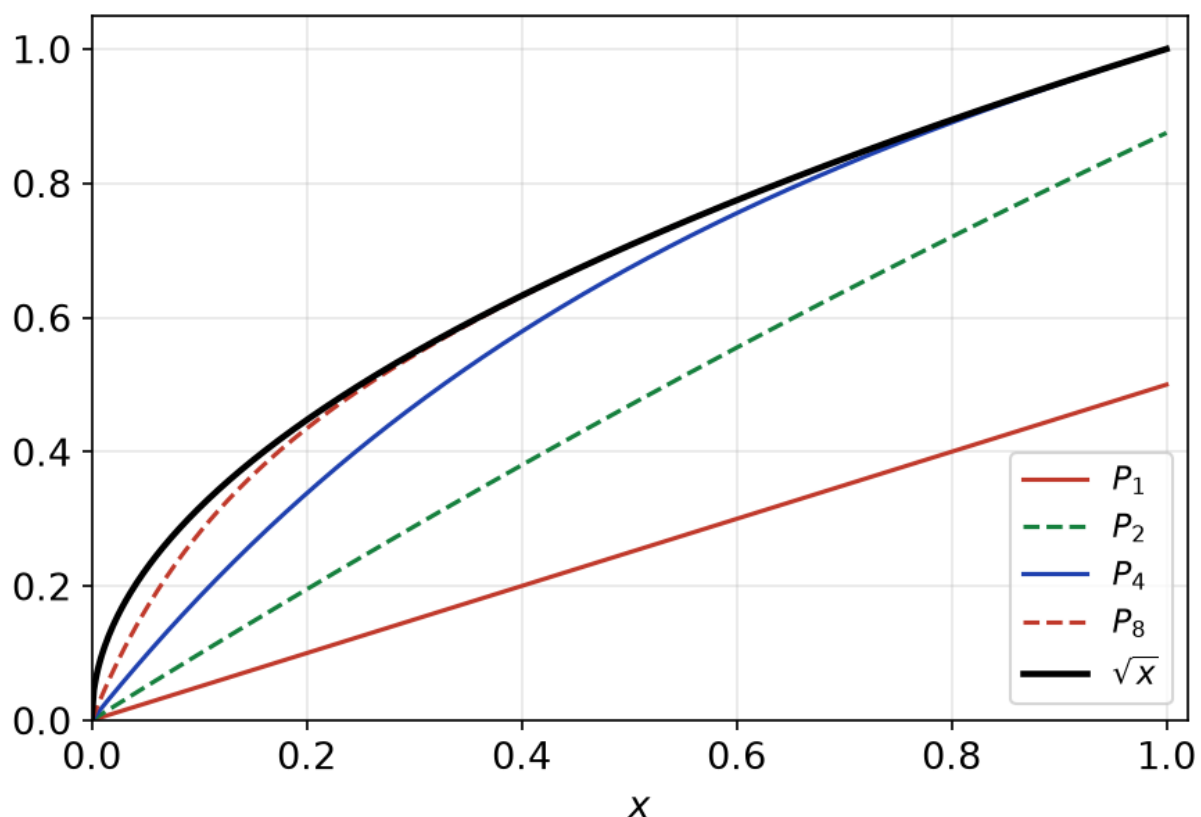
C'est l'identité demandée.

2. Raisonnons par récurrence sur n , pour $x \in [0,1]$ fixé. Pour $n = 0$, $0 \leq 0 \leq \sqrt{x}$. Supposons $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$. Alors $0 \leq \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \leq \sqrt{x} \leq 1$, donc le second facteur est dans $[0,1]$. Par la question 1, $0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} - P_n(x)$. Ainsi $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ et $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$. **La propriété est héréditaire.**

3. On a $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{x - P_n(x)^2}{2} \geq 0$, car $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$. La suite $(P_n(x))$ est croissante et majorée par $\sqrt{x}$: elle converge vers $\ell \in [0, \sqrt{x}]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, $\ell = \ell + \frac{x - \ell^2}{2}$, donc $\ell^2 = x$. Comme $\ell \geq 0$, $P_n(x) \rightarrow \sqrt{x}$.

4. Sur le compact $[0,1]$, les P_n sont continues, la suite est croissante et la limite simple $\sqrt{x}$ est continue. **D'après le théorème de Dini, P_n converge uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0,1]$.** Posons ensuite $Q_n(x) = P_n(x^2)$, qui est un polynôme. Pour $x \in [-1,1]$, on a $x^2 \in [0,1]$ et $\sqrt{x^2} = |x|$. Donc $\sup_{[-1,1]} |x| - Q_n(x) \leq \sup_{[0,1]} |\sqrt{t} - P_n(t)| \rightarrow 0$. Ainsi $x \rightarrow |x|$ est limite uniforme de polynômes sur $[-1,1]$.

La figure ci-dessous montre $P_1(x) = \frac{x}{2}$, $P_2(x) = x - \frac{x^2}{8}$, puis P_4 et P_8 . Les courbes montent vers celle de $\sqrt{x}$, conformément à la croissance de la suite. La convergence est plus lente près de 0, où la pente de la racine est infinie.



Point de méthode : dans le théorème de Dini, la monotonie transforme la convergence simple en une

suite décroissante de compacts, et la compacité fait le reste.

Corrigé de l'exercice 21 : Nombre de Lebesgue d'un recouvrement

1. Par la propriété de Borel-Lebesgue, on extrait un sous-recouvrement fini $U_1, \dots, U_p$. Une boule incluse dans l'un des U_k est incluse dans l'un des U_i . Il suffit donc de traiter ce recouvrement fini. Si l'un des U_k est égal à K , toute boule de K y est incluse, et n'importe quel ε convient. **On peut donc supposer $U_k \neq K$ pour tout k .**
2. Pour chaque k , l'ensemble $K \setminus U_k$ est non vide. La fonction $x \rightarrow d(x, K \setminus U_k)$ est donc bien définie et 1-lipschitzienne. Un maximum d'un nombre fini de fonctions continues est continu. Ainsi ϕ est continue. Ensuite, soit $x \in K$ et k tel que $x \in U_k$. Le fermé $K \setminus U_k$ ne contient pas x , donc $d(x, K \setminus U_k) > 0$. **Ainsi $\phi(x) > 0$.**
3. La fonction ϕ est continue sur le compact K : elle atteint son minimum $\varepsilon > 0$. Soit $x \in K$ et k tel que $d(x, K \setminus U_k) = \phi(x) \geq \varepsilon$. Si un point $y \in B(x, \varepsilon)$ n'était pas dans U_k , on aurait $d(x, K \setminus U_k) \leq d(x, y) < \varepsilon$. **Donc $B(x, \varepsilon) \subset U_k$.**
4. Soit $f : K \rightarrow F$ continue et $\varepsilon > 0$. Les ouverts $V_x = f^{-1}(B(f(x), \frac{\varepsilon}{2}))$, $x \in K$, recouvrent K . Soit δ un nombre de Lebesgue de ce recouvrement. Si $d(y, z) < \delta$, alors $y, z \in B(y, \delta) \subset V_x$ pour un certain x . Donc $d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(x), f(z)) < \varepsilon$. **On retrouve le théorème de Heine.**
5. On a $K \setminus U_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ et $K \setminus U_2 = [0, \frac{1}{3}]$. Donc $d(x, K \setminus U_1) = \max(\frac{2}{3} - x, 0)$ et $d(x, K \setminus U_2) = \max(x - \frac{1}{3}, 0)$. Sur $[0, \frac{1}{2}]$, on obtient $\phi(x) = \frac{2}{3} - x \geq \frac{1}{6}$. Sur $[\frac{1}{2}, 1]$, on obtient $\phi(x) = x - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{6}$. **Ainsi $\min_K \phi = \frac{1}{6}$, atteint en $x = \frac{1}{2}$.** On vérifie que $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ est bien incluse dans U_1 . En revanche, pour $\varepsilon > \frac{1}{6}$, la boule $B(\frac{1}{2}, \varepsilon)$ contient $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$: elle n'est incluse ni dans U_1 ni dans U_2 .

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [compacité et connexité, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur compacité et connexité](#)
- À maîtriser avant : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre précédent : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre suivant : [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)