

Calculs d'intégrales

Définition

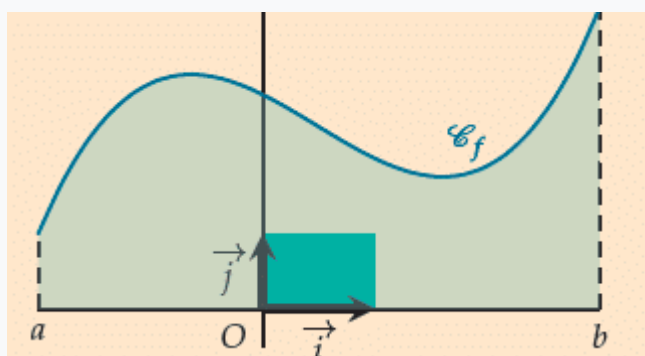
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.

On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

L'unité d'aire, que l'on note u.a., est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.

I. Intégrale d'une fonction continue et positive.

Définition : notion d'intégrale.



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ de courbe représentative C_f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire se note $\int_a^b f(x) dx$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x) dx$ ».

Remarques :

1. a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.
2. La valeur de l'intégrale ne dépend que de a, b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

3. Pour toute fonction f continue et positive en un réel a, $\int_a^a f(x)dx = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur f (a).

4. Le symbole $\int$ est dû à Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Théorème : dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].

La fonction $F : x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est définie et dérivable sur [a ; b] et on a $F' = f$.

II. Primitives d'une fonction continue.

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarques :

On dit que F est une **primitive de f** et non pas la primitive de f car une fonction

admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple :

Soit $f : x \rightarrow 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $F_1 : x \rightarrow x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
De même, $F_2 : x \rightarrow x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $F'_1 = F'_2 = f$.

Théorème : existence de primitives.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Théorème : Lien entre les primitives.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .
Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme
 $x \rightarrow F(x) + k, k \in \mathbb{R}$.

Propriété : condition d'unicité de la primitive.

Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I , il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

Remarque :

Pour tout $x_0 \in I$ et $F : x \rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt$ est donc la primitive de f sur I s'annulant en x_0 .

En effet, F est bien une primitive de f sur I et c'est la seule vérifiant la condition $F(x_0) = 0$.

Propriété : calcul pratique d'une intégrale.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Exemple :

On souhaite calculer $\int_0^1 x^2 dx$. Pour cela, posons $f : x \rightarrow x^2$, définie sur $[0 ; 1]$.

En remarquant que $F : x \rightarrow \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur $[0 ; 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Propriété : primitives des fonctions usuelles.

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$	$] -\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Propriété : primitives et opérations sur les fonctions.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u' u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$F = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u' e^u$	$F = e^u$	$x \in I$

III. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

On a vu au paragraphe précédent que, pour une fonction continue et positive sur $[a ; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a ; b].$$

On étend cette propriété aux fonctions de signe quelconque, continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec la définition ci-dessous.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ et de signe quelconque et F une primitive de f sur $[a ; b]$. On pose : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Exemple :

On souhaite calculer $\int_{-1}^2 (x^2 - 2) dx$. Pour cela, on pose $f : x \rightarrow x^2 - 2$ définie sur $I = [-1 ; 2]$.

Une primitive de f sur I est $F: x \rightarrow \frac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 2) dx = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \times 2 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2 \times (-1) \right) = -3 .$$

Propriété : linéarité de l'intégrale.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ et α un réel. Alors :

☐ .

$$\int_a^b (\alpha f)(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt$$

Propriété : fonction négative et aire.

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a ; b]$. Alors, l'aire du domaine situé entre ☐ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a ; b]$ est $-\int_a^b f(x) dx$.

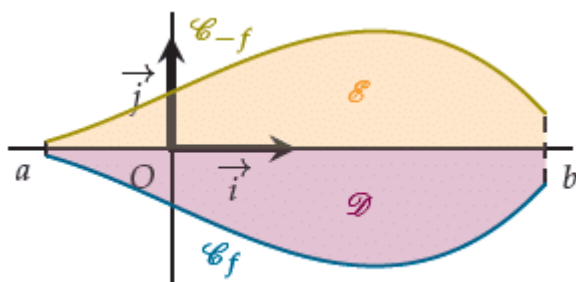
Preuve :

On note D le domaine situé entre C_f et l'axe des abscisses, sur $[a ; b]$.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de D est égale à l'aire du domaine E , compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a ; b]$.

Ainsi :

$$A_D = A_E = \int_a^b (-f)(x) dx = - \int_a^b f(x) dx .$$



Propriété : relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c , trois réels appartenant à I . Alors :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

Preuve :

f étant une fonction continue sur I , elle admet une primitive sur cet intervalle.

Notons F une primitive de f sur I .

- Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

$$\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a) \text{ par définition.}$$

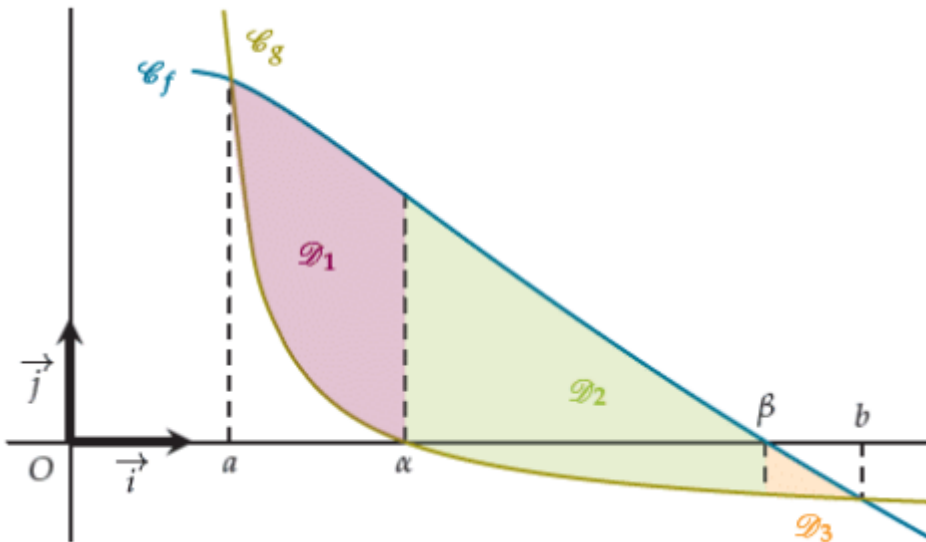
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$ toujours par définition puis en réduisant l'expression obtenue.

L'égalité annoncée est donc vraie.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ telles que $f > g$. Alors, l'aire

du domaine compris entre les courbes C_f et C_g sur $[a ; b]$ est donnée par $\int_a^b (f - g)(x) dx$.



Propriété : intégrales et inégalités.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$. Alors :

- Si f est positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Si pour tout $x \in [a ; b]$, $\boxed{\times}$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Définition : valeur moyenne.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est le nombre

μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Remarque :

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a ; b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a ; b]$.

L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$(b-a)\mu = \int_a^b f(t) dt$$

