

Calcul matriciel

Exercice 1 : Produits de matrices et non-commutativité

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donnez le format de AB et celui de BA , puis calculez ces deux produits.
2. Calculez BX , puis $A(BX)$. Calculez ensuite $(AB)X$. Quelle propriété du produit retrouvez-vous ?
3. Soient $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez DE et ED . Conclusion ?

Exercice 2 : Produits de matrices élémentaires

On travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note E_{ij} les matrices élémentaires.

1. Démontrez la formule $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ en calculant le coefficient d'indice (r, s) du produit.
2. Pour $n = 3$, calculez $E_{12}E_{23}$, $E_{23}E_{12}$, E_{12}^2 et $E_{21}E_{12}$.

- On pose $N = E_{12} + E_{23}$. Calculez N^2 et N^3 , puis écrivez N et N^2 sous forme de tableaux.
- Déduisez des questions précédentes deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ qui ne commutent pas, et une matrice non nulle de carré nul.

Exercice 3 : Transposée d'un produit

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ , & 0 & \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculez AA^T et $A^T A$. Que remarquez-vous ?
- Démontrez que $(MN)^T = N^T M^T$ pour $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- Déduisez-en que MM^T et $M^T M$ sont symétriques pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- On suppose M à coefficients réels. Exprimez le coefficient diagonal $(M^T M)_{jj}$ à l'aide des m_{ij} . Déduisez-en que $M^T M = 0$ entraîne $M = 0$.

Exercice 4 : Système de Cramer par le pivot de Gauss

On considère le système

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ -x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

- Écrivez le système sous la forme $AX = B$.

2. Échelonnez-le par la méthode du pivot, en indiquant chaque opération.
3. Déterminez son unique solution et vérifiez-la.

Exercice 5 : Système homogène associé et compatibilité

On considère le système d'inconnues réelles x, y, z, t :

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 2 \\ 2x - 2y + 5z + 4t = 7 \\ 3x - 3y + 7z + 5t = 9 \end{cases}$$

1. Écrivez-le sous la forme $AX = B$ en précisant le format de A .
2. Résolvez le système homogène associé $AX = 0$.
3. Trouvez une solution particulière, puis décrivez toutes les solutions du système.
4. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, donnez une condition nécessaire et suffisante pour que le système de même matrice et de second membre (a, b, c) soit compatible.

Exercice 6 : Système linéaire à paramètre

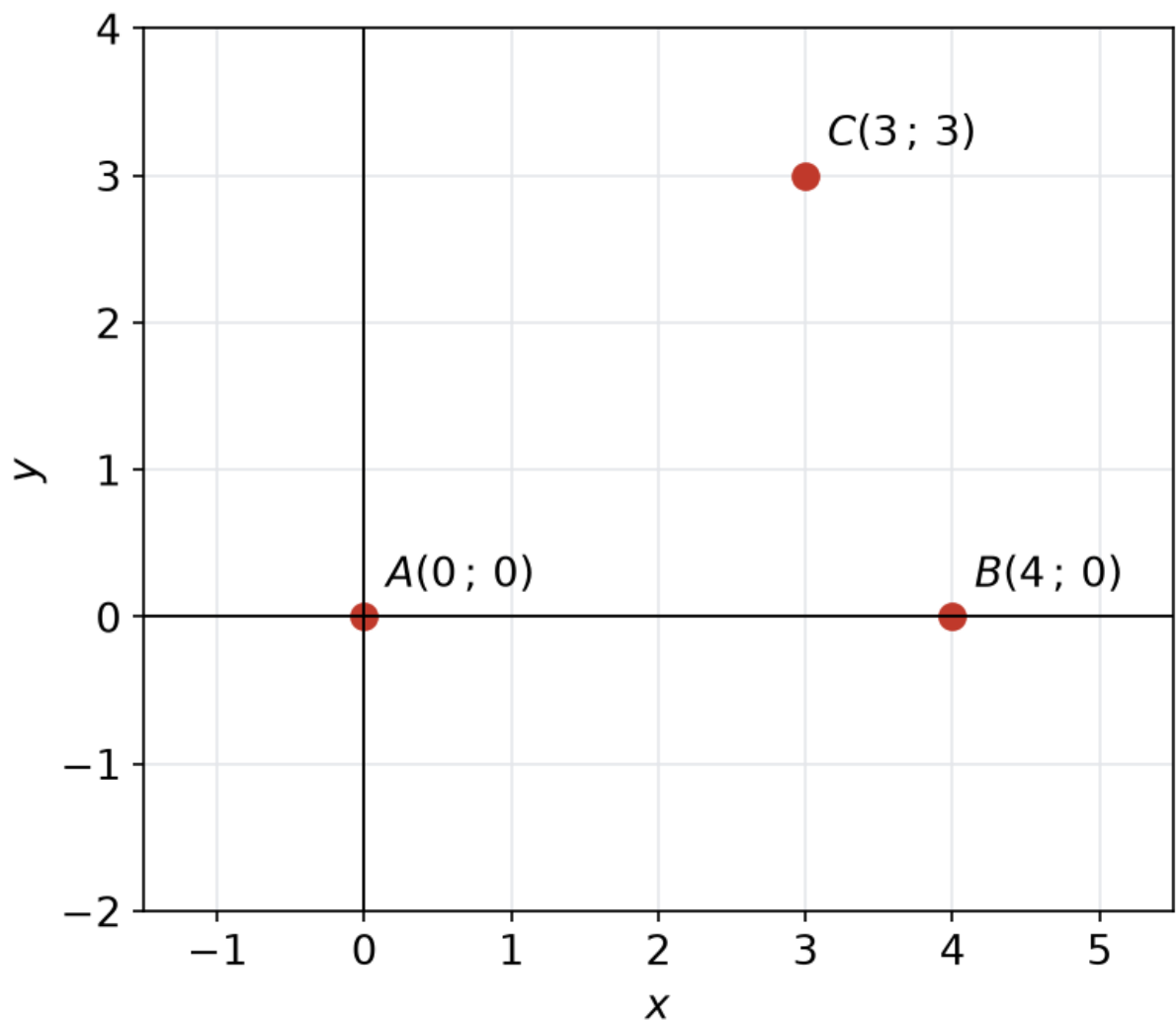
Soit λ un réel. On considère le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \\ x + 4y + \lambda^2 z = 5 \end{cases}$$

1. Échelonnez le système en choisissant des pivots indépendants de λ .
2. Pour quelles valeurs de λ le système admet-il une unique solution ? Donnez-la.
3. Que se passe-t-il pour les autres valeurs de λ ?
4. On prend $\lambda = 1$ et on remplace le second membre par $(1, 2, 4)$. Résolvez ce nouveau système.

Exercice 7 : Cercle passant par trois points

Dans un repère orthonormé, on cherche un cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ passant par les points $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ et $C(3; 3)$, représentés ci-dessous.



1. Traduisez les trois conditions par un système linéaire d'inconnues a , b , c .
2. Résolvez ce système par le pivot de Gauss.
3. Déterminez le centre et le rayon du cercle. Le point $D(1; 3)$ est-il sur ce cercle ?
4. Montrez qu'aucun cercle ne passe par A , B et $F(2; 0)$. Interprétez.

Exercice 8 : Opérations élémentaires et matrices de transvection

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. On note $T_{ij}(\lambda) = I_3 + \lambda E_{ij}$ pour $i \neq j$.

1. Écrivez $T_{21}(-4)$ et calculez $T_{21}(-4)A$. Quelle opération sur les lignes a-t-on effectuée ?
2. On effectue ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$. Donnez la matrice triangulaire U obtenue et les matrices de transvection correspondantes.
3. À l'aide de la règle $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, calculez $G = T_{32}(-2)T_{31}(-7)T_{21}(-4)$ et vérifiez que $GA = U$.
4. Calculez $L = T_{21}(4)T_{31}(7)T_{32}(2)$, justifiez que $L = G^{-1}$, et vérifiez que $A = LU$.
5. Déduisez-en que A est inversible.
6. Calculez AP_{13} , où P_{13} échange les lignes 1 et 3 de I_3 . Quelle opération sur les colonnes obtient-on ?

Exercice 9 : Inverse par opérations élémentaires

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 88 \end{pmatrix}$.

1. Appliquez la méthode de Gauss-Jordan au tableau $(A | I_3)$. Montrez que A est inversible et calculez A^{-1} .
2. Vérifiez le résultat par un produit.
3. Déduisez-en la solution du système $x + 2z = 1$, $2x - y + 3z = 0$, $4x + y + 8z = 2$.

Exercice 10 : Inverse par résolution de $AX = Y$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résolvez le système $AX = Y$ pour $Y = (a, b, c)^T$ quelconque. Déduisez-en que A est inversible et donnez A^{-1} .

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de λ la matrice B_λ est-elle inversible ? Donnez alors son inverse en résolvant $B_\lambda X = Y$.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouvez une colonne $X \neq 0$ telle que $CX = 0$. Pourquoi C n'est-elle pas inversible ?

Exercice 11 : Matrices triangulaires inversibles

1. Montrez que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieur, et précisez sa diagonale.
2. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Justifiez que T est inversible, puis calculez T^{-1} en résolvant $TX = Y$ de bas en haut.
3. Soit $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Trouvez $X \neq 0$ tel que $UX = 0$.
4. Plus généralement, soit T triangulaire supérieure de taille n dont un coefficient diagonal est nul. Montrez que T n'est pas inversible. On pourra considérer le plus petit indice k tel que $t_{kk} = 0$.

Exercice 12 : Symétriques et antisymétriques

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrez que toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$.

2. Calculez S et A pour $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & \\ , & 1 & \\ -1 & 7 & 4,4 \end{pmatrix}$.

3. Montrez que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls, et que le carré d'une matrice antisymétrique est symétrique.

4. Soient $S, S' \in \mathcal{S}_n$. Montrez que SS' est symétrique si et seulement si $SS' = S'S$.
Donnez un exemple en taille 2 où SS' n'est pas symétrique.

Exercice 13 : Commutant d'une matrice diagonale

1. Soient $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculez les coefficients de DM et de MD .

2. On suppose les d_i deux à deux distincts. Montrez que $DM = MD$ si et seulement si M est diagonale.

3. Soit $\Delta = \text{diag}(1, 1, 2)$. Déterminez toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ qui commutent avec Δ .

4. Calculez Δ^m pour $m \in \mathbb{N}$, puis trouvez deux réels α_m et β_m tels que $\Delta^m = \alpha_m I_3 + \beta_m \Delta$.

Exercice 14 : Puissance d'une matrice triangulaire par le binôme

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \\ 0 & 0 & -,-1 \end{pmatrix}$ et $N = A + I_3$.

1. Calculez N , N^2 et N^3 .

2. Justifiez l'emploi de la formule du binôme pour $A = -I_3 + N$.

3. Calculez A^m pour tout entier $m \geq 0$ sous forme d'un tableau explicite.

4. Vérifiez votre formule pour $m = 2$ par un calcul direct.

Exercice 15 : Puissances de $2I + J$ et inverse

Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculez J^2 , puis J^k pour tout $k \geq 1$.
2. Écrivez M à l'aide de I_3 et J . Montrez que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$M^p = 2^p I_3 + \frac{5^p - 2^p}{3} J.$$
3. Vérifiez que $M^2 = 7M - 10I_3$. Déduisez-en que M est inversible et calculez M^{-1} .
4. La formule de la question 2 reste-t-elle vraie pour $p = -1$?

Exercice 16 : Diviseurs de zéro et nilpotents

1. Trouvez deux matrices élémentaires A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
2. Montrez qu'une matrice $A \neq 0$ pour laquelle il existe $B \neq 0$ avec $AB = 0$ n'est pas inversible.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 et déduisez-en une matrice $B \neq 0$ telle que $AB = 0$.
4. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez N^2 et N^3 . Montrez que $I_3 - N$ est inversible et calculez son inverse.

Exercice 17 : Matrices nilpotentes de taille 2

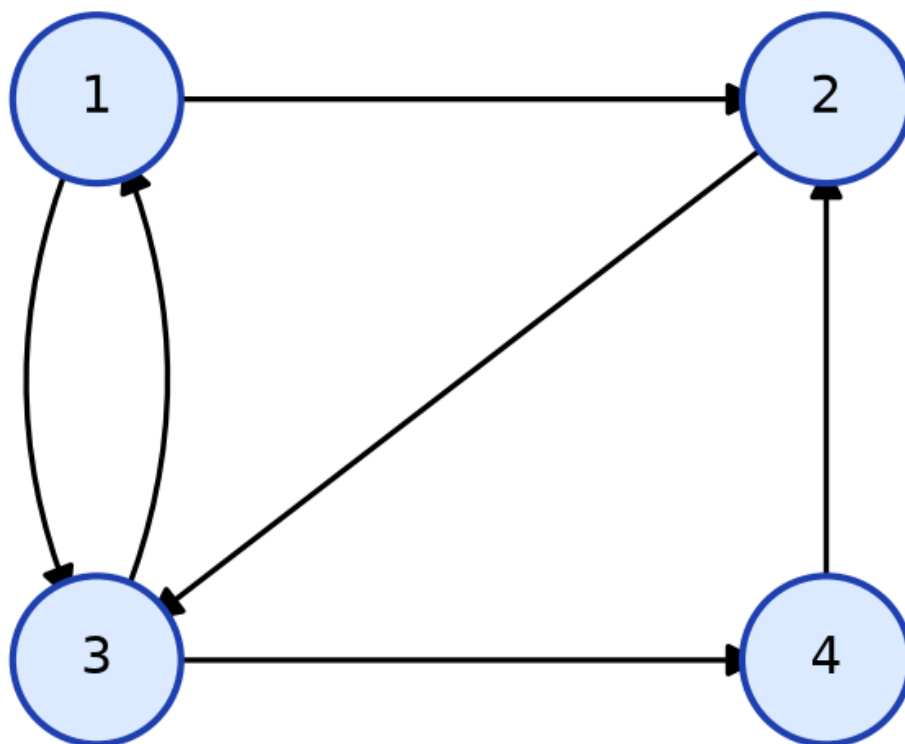
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Vérifiez que $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0$.
2. On suppose M nilpotente. Montrez que $ad - bc = 0$, puis que $M^k = (a + d)^{k-1}M$ pour tout $k \geq 1$.
3. Déduisez-en que M est nilpotente si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$, et qu'alors $M^2 = 0$.
4. Vérifiez que $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est nilpotente et calculez $(I_2 + N)^m$ pour $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 : Chemins dans un graphe orienté

On considère le graphe orienté ci-dessous, à quatre sommets. On lui associe la matrice d'adjacence

$A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $a_{ij} = 1$ s'il existe une flèche de i vers j , et $a_{ij} = 0$ sinon. Un chemin de longueur k est une suite de k flèches consécutives.



1. Écrivez la matrice A .
2. Montrez par récurrence sur $k \geq 1$ que $(A^k)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur k allant de i à j .
3. Calculez A^2 et A^3 .
4. Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 de 1 vers 2 ? Décrivez-les. Combien de chemins de longueur 3 partent de 3 et y reviennent ?
5. Combien le graphe possède-t-il de chemins de longueur 2 au total ?

Exercice 19 : Suites récurrentes couplées

On définit deux suites par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -u_n + v_n$.

1. Trouvez $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$, où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimez X_n en fonction de A , n et X_0 .
2. On pose $N = A - 2I_2$. Calculez N^2 .
3. Déduisez-en A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Donnez u_n et v_n en fonction de n , puis vérifiez pour $n = 2$.

Exercice 20 : Matrices de rotation du plan

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ pour tous réels α et β . Les matrices $R(\alpha)$ et $R(\beta)$ commutent-elles ?
2. Déduisez-en $R(\theta)^m$ pour $m \in \mathbb{N}$. Montrez que $R(\theta)$ est inversible, d'inverse $R(-\theta) = R(\theta)^T$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Écrivez $A = rR(\theta)$ avec $r > 0$. Calculez A^6 , puis A^{2026} .
4. On note $e_1 = (1, 0)^T$. Décrivez les points $R(\pi/3)^k e_1$ pour $0 \leq k \leq 6$.

Exercice 21 : Centre de l'anneau des matrices carrées

On cherche les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Cas $n = 2$: déterminez les matrices qui commutent avec E_{12} , puis celles qui commutent à la fois avec E_{12} et E_{21} .
2. Cas général : pour $A = (a_{kl})$, exprimez AE_{ij} et $E_{ij}A$ comme combinaisons de matrices élémentaires.
3. Déduisez-en que A commute avec toutes les matrices si et seulement si $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. Montrez que chaque E_{ij} est la différence de deux matrices inversibles. Déduisez-en les matrices qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 22 : Problème : la matrice de Pascal

On numérote lignes et colonnes de 0 à 3. On définit $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par $p_{ij} = \binom{i}{j}$, avec la convention $\binom{i}{j} = 0$ si $j > i$.

1. Écrivez P et justifiez qu'elle est inversible.
2. Calculez P^{-1} en résolvant $PX = Y$. Quelle formule simple semble donner ses coefficients ?
3. On pose $N = P - I_4$. Calculez N^2 , N^3 et N^4 . Retrouvez P^{-1} à partir de $I_4 - N + N^2 - N^3$.
4. Calculez P^2 et comparez ses coefficients à $2^{i-j} \binom{i}{j}$.
5. On se place maintenant en taille $n + 1$, avec les mêmes définitions. Établissez l'identité $\binom{i}{k} \binom{k}{j} = \binom{i}{j} \binom{i-j}{k-j}$ pour $j \leq k \leq i$. Déduisez-en les coefficients de P^2 , puis prouvez que P^{-1} a pour coefficients $(-1)^{i-j} \binom{i}{j}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [calcul matriciel, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#), [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre précédent : [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre suivant : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)