

Calcul matriciel

Corrigé de l'exercice 1 : Produits de matrices et non-commutativité

1. La matrice A est de format 2×3 et B de format 3×2 . Donc AB existe et est de format 2×2 , tandis que BA existe et est de format 3×3 . Ligne par colonne, on obtient d'abord $(AB)_{11} = 2 \times 1 + 0 \times (-1) + (-1) \times 4 = -2$ et $(AB)_{12} = 4 + 0 - 1 = 3$. Ensuite, $(AB)_{21} = 1 - 3 + 4 = 2$ et $(AB)_{22} = 2 + 0 + 1 = 3$. Pour BA , chaque ligne de BA est une combinaison des lignes de A : la ligne 1 vaut

$1 \times (2, 0, -1) + 2 \times (1, 3, 1) = (4, 6, 1)$, la ligne 2 vaut $-(2, 0, -1) = (-2, 0, 1)$, et la ligne 3 vaut $4(2, 0, -1) + (1, 3, 1) = (9, 3, -3)$. Ainsi $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. On a $BX = (1 + 2, -1 + 0, 4 + 1)^T = (3, -1, 5)^T$. Puis $A(BX) = (6 + 0 - 5, 3 - 3 + 5)^T = (1, 5)^T$. D'autre part, $(AB)X = (-2 + 3, 2 + 3)^T = (1, 5)^T$. **Les deux résultats coïncident : c'est l'associativité $A(BX) = (AB)X$.**

3. On calcule $DE = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De même, $ED = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **Donc $DE \neq ED$: même entre matrices carrées de même taille, le produit n'est pas commutatif.**

Point de méthode : pour un produit BA , calculer chaque ligne comme combinaison des lignes de A évite beaucoup d'erreurs de placement.

Corrigé de l'exercice 2 : Produits de matrices élémentaires

1. Le coefficient d'indice (r, t) de E_{ij} vaut $\delta_{ri}\delta_{tj}$. Par définition du produit, on a donc

$$(E_{ij}E_{kl})_{rs} = \sum_{t=1}^n \delta_{ri}\delta_{tj}\delta_{tk}\delta_{sl} = \delta_{ri}\delta_{sl} \sum_{t=1}^n \delta_{tj}\delta_{tk} = \delta_{jk} \delta_{ri}\delta_{sl}.$$

En effet, la dernière somme vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon. Or $\delta_{ri}\delta_{sl}$ est le coefficient (r, s) de E_{il} . **Donc** $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

2. On applique la règle : $E_{12}E_{23} = \delta_{22}E_{13} = E_{13}$. Ensuite, $E_{23}E_{12} = \delta_{31}E_{22} = 0$. De plus, $E_{12}^2 = \delta_{21}E_{12} = 0$. Enfin, $E_{21}E_{12} = \delta_{11}E_{22} = E_{22}$. **Bilan :** E_{13} , 0, 0 et E_{22} .

3. Par bilinéarité, $N^2 = E_{12}^2 + E_{12}E_{23} + E_{23}E_{12} + E_{23}^2 = 0 + E_{13} + 0 + 0 = E_{13}$. Puis $N^3 = E_{13}E_{12} + E_{13}E_{23} = 0$, car $3 \neq 1$ et $3 \neq 2$. **Ainsi**

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0.$$

4. Comme $E_{12}E_{23} = E_{13} \neq 0 = E_{23}E_{12}$, les matrices E_{12} et E_{23} ne commutent pas. Par ailleurs, E_{12} est non nulle et vérifie $E_{12}^2 = 0$.

Corrigé de l'exercice 3 : Transposée d'un produit

1. Les lignes de A sont $\ell_1 = (1, 2, 0)$ et $\ell_2 = (-1, 1, 3)$. Le coefficient (i, j) de AA^T est le produit « ligne par ligne » de ℓ_i et ℓ_j . On trouve $1 + 4 = 5$, puis

$-1 + 2 + 0 = 1$, puis $1 + 1 + 9 = 11$. De même, $A^T A$ combine les colonnes $c_1 = (1, -1)$, $c_2 = (2, 1)$, $c_3 = (0, 3)$. **On obtient** $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ et

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 9 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} : \text{ces deux matrices sont symétriques.}$$

2. Pour tous i et j , on a $((MN)^T)_{ij} = (MN)_{ji} = \sum_k m_{jk}n_{ki}$. D'autre part,

$$(N^T M^T)_{ij} = \sum_k (N^T)_{ik}(M^T)_{kj} = \sum_k n_{ki}m_{jk}. \text{ Les deux sommes sont égales,}$$

donc $(MN)^T = N^T M^T$.

3. D'après la question précédente, $(MM^T)^T = (M^T)^T M^T = MM^T$. De même, $(M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M$. Ces deux matrices carrées sont donc symétriques.

4. On a $(M^T M)_{jj} = \sum_{i=1}^n (M^T)_{ji} m_{ij} = \sum_{i=1}^n m_{ij}^2$. Si $M^T M = 0$, chacune de ces sommes de carrés réels est nulle. Par conséquent, tous les m_{ij} sont nuls. **Donc** $M^T M = 0 \Rightarrow M = 0$ pour une matrice réelle.

Point de méthode : le dernier argument utilise la positivité des carrés réels. Il tombe en défaut sur $\mathbb{C}$, par exemple avec la colonne $M = (1, i)^T$, pour laquelle $M^T M = 1 + i^2 = 0$.

Corrigé de l'exercice 4 : Système de Cramer par le pivot de Gauss

1. Le système s'écrit $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \\ , & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Le pivot est le coefficient 1 de x dans L_1 . D'abord, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $y - 3z = -4$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donne $2y + 6z = 4$. Enfin, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $12z = 12$. **Le système échelonné est** $x + y + 2z = 3$, $y - 3z = -4$, $12z = 12$.
3. On remonte : $z = 1$, puis $y = -4 + 3z = -1$, puis $x = 3 - y - 2z = 3 + 1 - 2 = 2$. Vérification : $2 - 1 + 2 = 3$, $4 - 3 + 1 = 2$ et $-2 - 1 + 4 = 1$. **L'unique solution est** $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

Corrigé de l'exercice 5 : Système homogène associé et compatibilité

1. On a $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = (x, y, z, t)^T$ et $B = (2, 7, 9)^T$. La matrice A est de format 3×4 .
2. Pour le système homogène, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $z + 2t = 0$, et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donne aussi $z + 2t = 0$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $0 = 0$. Il reste donc $z = -2t$ et $x = y - 2z - t = y + 3t$. Les inconnues secondaires sont y et t . **Les solutions homogènes sont les** $y(1, 1, 0, 0) + t(3, 0, -2, 1)$, avec $y, t \in \mathbb{R}$.
3. Les mêmes opérations sur le système complet donnent $z + 2t = 7 - 4 = 3$, puis $z + 2t = 9 - 6 = 3$, et enfin $0 = 0$. Avec $y = t = 0$, on trouve $z = 3$ et $x = 2 - 6 = -4$. On vérifie que $(-4, 0, 3, 0)$ satisfait les trois équations : $-4 + 6 = 2$, $-8 + 15 = 7$ et $-12 + 21 = 9$. D'après le théorème de structure, **les solutions sont les** $(-4, 0, 3, 0) + y(1, 1, 0, 0) + t(3, 0, -2, 1)$, avec $y, t \in \mathbb{R}$.
4. Avec un second membre (a, b, c) , les opérations donnent $z + 2t = b - 2a$ et $z + 2t = c - 3a$. La dernière opération produit alors $0 = c - 3a - (b - 2a) = c - a - b$. Si $c \neq a + b$, le système est incompatible. Sinon, on résout comme ci-dessus. **Le système est compatible si et seulement si** $c = a + b$. On retrouve que $L_3 = L_1 + L_2$ dans la matrice A .

Corrigé de l'exercice 6 : Système linéaire à paramètre

1. On garde L_1 comme ligne de pivot, puisque le coefficient de x vaut 1. D'abord, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $y + (\lambda - 1)z = 1$. Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $3y + (\lambda^2 - 1)z = 4$. Enfin, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)z = 1$. Or $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. **Le système échelonné est** $x + y + z = 1$, $y + (\lambda - 1)z = 1$, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)z = 1$.
2. Si $\lambda \notin \{1, 2\}$, le troisième pivot est non nul. Donc $z = \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}$. Ensuite, $y = 1 - (\lambda - 1)z = 1 - \frac{1}{\lambda - 2} = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2}$. Enfin,

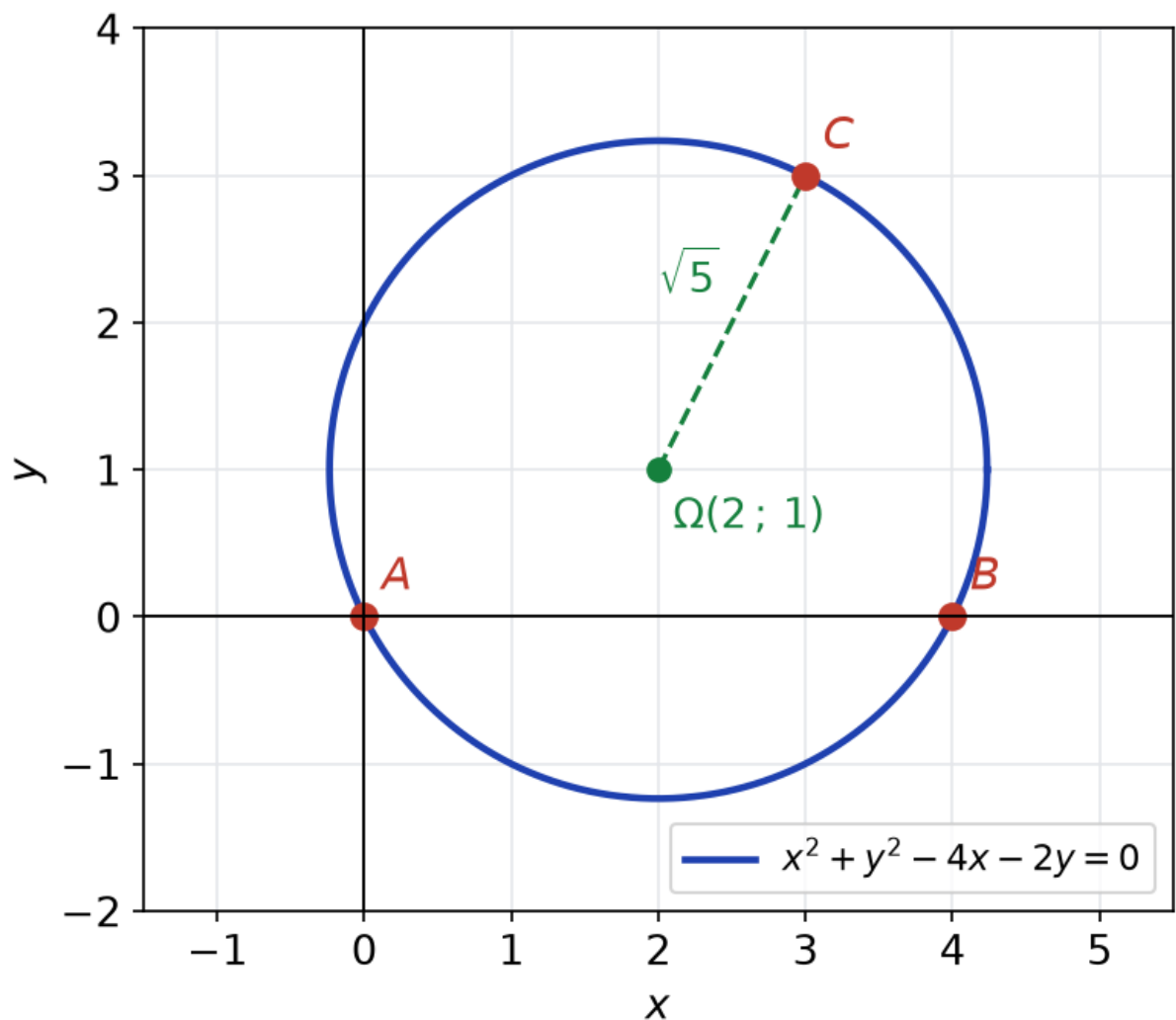
$$x = 1 - y - z = \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2) - (\lambda - 3)(\lambda - 1) - 1}{(\lambda - 1)(\lambda - 2)} = \frac{(\lambda - 1) - 1}{(\lambda - 1)(\lambda - 2)} = \frac{1}{\lambda - 1}.$$

Par exemple, pour $\lambda = 0$, on trouve $(-1, 3/2, 1/2)$, qui vérifie bien $-1 + 3 = 2$ et $-1 + 6 = 5$. **Pour $\lambda \neq 1, 2$, l'unique solution est $\left(\frac{1}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2}, \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda - 2)}\right)$.**

- Si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$, la dernière ligne devient $0 = 1$. **Le système n'a alors aucune solution.** Remarquons qu'il n'a jamais une infinité de solutions avec ce second membre.
- Pour $\lambda = 1$ et le second membre $(1, 2, 4)$, les opérations donnent $y = 1$, puis $3y = 3$, puis $0 = 0$. Il reste $x + z = 1 - y = 0$. En posant $z = t$, on obtient $x = -t$. **Les solutions sont les $(-t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$: une droite de solutions.** Ainsi, pour une même matrice non inversible, le second membre décide entre « aucune solution » et « une infinité ».

Corrigé de l'exercice 7 : Cercle passant par trois points

- Un point (x_0, y_0) est sur le cercle si $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$. Avec A , on obtient $c = 0$. Avec B , on obtient $16 + 4a + c = 0$. Avec C , on obtient $9 + 9 + 3a + 3b + c = 0$. **Le système est $4a + c = -16$, $3a + 3b + c = -18$, $c = 0$.**
- On prend $L_1 : 4a + c = -16$ comme ligne de pivot. L'opération $L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1$ donne $12b + c = -72 + 48 = -24$. Le système est alors échelonné, avec $L_3 : c = 0$. En remontant, $c = 0$, puis $b = -2$, puis $a = -4$. **Donc $(a, b, c) = (-4, -2, 0)$, et le cercle a pour équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.**
- On complète les carrés : $x^2 - 4x + y^2 - 2y = (x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1$. L'équation devient donc $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$. **Le centre est $O(2; 1)$ et le rayon vaut $\sqrt{5}$.** Pour D , on calcule $1 + 9 - 4 - 6 = 0$. **Le point D est donc sur le cercle.** La figure ci-dessous montre ce cercle et les trois points de départ.



4. Pour A , B , F , les équations sont $c = 0$, $16 + 4a + c = 0$ et $4 + 2a + c = 0$. Les deux premières donnent $a = -4$, et la troisième donne $a = -2$. Le système est donc incompatible. **Aucun cercle ne passe par A , B et F .** En effet, ces trois points sont alignés sur l'axe des abscisses, et une droite coupe un cercle en au plus deux points.

Corrigé de l'exercice 8 : Opérations élémentaires et matrices de transvection

1. On a $T_{21}(-4) = I_3 - 4E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplier à gauche par cette matrice

remplace la ligne 2 par $L_2 - 4L_1$. Ainsi $T_{21}(-4)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$: c'est l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$.

2. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$ donne la ligne $(0, -6, -11)$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $(0, -6 + 6, -11 + 12) = (0, 0, 1)$. Ces opérations correspondent à $T_{31}(-7)$ et $T_{32}(-2)$.

On obtient $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. D'abord, $T_{31}(-7)T_{21}(-4) = I_3 - 4E_{21} - 7E_{31} + 28E_{31}E_{21}$, et $E_{31}E_{21} = 0$ car $1 \neq 2$. Ensuite, on multiplie à gauche par $I_3 - 2E_{32}$. Les produits utiles sont $E_{32}E_{21} = E_{31}$ et $E_{32}E_{31} = 0$. Donc

$$G = I_3 - 4E_{21} - 7E_{31} - 2E_{32} + 8E_{31} = I_3 - 4E_{21} + E_{31} - 2E_{32}.$$

Ainsi $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifions la dernière ligne de GA :

$L_1 - 2L_2 + L_3 = (1 - 8 + 7, 2 - 10 + 8, 3 - 12 + 10) = (0, 0, 1)$. La deuxième ligne vaut $(0, -3, -6)$. On a bien $GA = U$.

4. On calcule $(I_3 + 4E_{21})(I_3 + 7E_{31}) = I_3 + 4E_{21} + 7E_{31}$, puisque $E_{21}E_{31} = 0$. Puis on multiplie à droite par $I_3 + 2E_{32}$. Or $E_{21}E_{32} = 0$ et $E_{31}E_{32} = 0$, car $1 \neq 3$.

Donc $L = I_3 + 4E_{21} + 7E_{31} + 2E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs,

$G^{-1} = T_{21}(-4)^{-1}T_{31}(-7)^{-1}T_{32}(-2)^{-1} = T_{21}(4)T_{31}(7)T_{32}(2) = L$, car l'inverse d'un produit renverse l'ordre. Enfin, $GA = U$ donne $A = LU$. Vérification : la ligne 3 de LU vaut $7(1, 2, 3) + 2(0, -3, -6) + (0, 0, 1) = (7, 8, 10)$.

5. La matrice U est triangulaire, de diagonale $(1, -3, 1)$ sans zéro : elle est donc inversible. De plus, L est inversible, comme produit de transvections. **Par conséquent, $A = LU$ est inversible, comme produit de deux matrices inversibles.**

6. Multiplier à droite par P_{13} agit sur les colonnes. On obtient $AP_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \\ 10 & 8 & 7 \end{pmatrix}$: c'est l'échange des colonnes 1 et 3.

Corrigé de l'exercice 9 : Inverse par opérations élémentaires

1. On part du tableau $(A | I_3)$. D'abord, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne la ligne $(0, 0, -1 | -6, 1, 1)$. On a trois pivots non nuls, donc A est inversible. On normalise : $L_3 \leftarrow -L_3$ donne $(0, 0, 1 | 6, -1, -1)$, et

$L_2 \leftarrow -L_2$ donne $(0, 1, 1 | 2, -1, 0)$. Puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ donne $(0, 1, 0 | -4, 0, 1)$.

Enfin, $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ donne $(1, 0, 0 | -11, 2, 2)$. **Donc** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On calcule AA^{-1} . La ligne 1 donne $(-11 + 12, 2 - 2, 2 - 2) = (1, 0, 0)$. La ligne 2 donne $(-22 + 4 + 18, 4 - 3, 4 - 1 - 3) = (0, 1, 0)$. La ligne 3 donne $(-44 - 4 + 48, 8 - 8, 8 + 1 - 8) = (0, 0, 1)$. **On a bien** $AA^{-1} = I_3$.

3. Le système s'écrit $AX = (1, 0, 2)^T$. Comme A est inversible,

$$X = A^{-1}(1, 0, 2)^T = (-11 + 4, -4 + 2, 6 - 2)^T. \text{ V\'erification : } -7 + 8 = 1,$$

$$-14 + 2 + 12 = 0 \text{ et } -28 - 2 + 32 = 2. \text{ La solution est } (x, y, z) = (-7, -2, 4).$$

Corrigé de l'exercice 10 : Inverse par résolution de $AX = Y$

1. Le système s'écrit $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$. En additionnant,

$$2(x + y + z) = a + b + c. \text{ On en d\'eduit d'abord}$$

$$z = (x + y + z) - (x + y) = \frac{-a + b + c}{2}. \text{ De m\^eme, } y = \frac{a - b + c}{2} \text{ et}$$

$$x = \frac{a + b - c}{2}. \text{ Le syst\^eme a une unique solution pour tout } Y, \text{ donc } A \text{ est inversible. On}$$

$$\text{lit } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ V\'erification sur la premi\^ere ligne de } AA^{-1} :$$

$$\frac{1}{2}(1 + 1, 1 - 1, -1 + 1) = (1, 0, 0).$$

2. Le syst\^eme $x + \lambda y = a$, $\lambda x + y = b$ donne, par $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$, l'\\'equation

$$(1 - \lambda^2)y = b - \lambda a. \text{ Si } \lambda \neq \pm 1, \text{ on obtient } y = \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda^2}, \text{ puis}$$

$$x = a - \lambda y = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda^2}. \text{ Si } \lambda = 1, \text{ la colonne } (1, -1)^T \text{ est une solution non nulle de}$$

$$B_1 X = 0. \text{ Si } \lambda = -1, \text{ la colonne } (1, 1)^T \text{ convient pour } B_{-1}. \text{ Ainsi } B_\lambda \text{ est}$$

$$\text{inversible si et seulement si } \lambda \neq \pm 1, \text{ et alors } B_\lambda^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le système $CX = 0$ se réduit à $x + 2y + 3z = 0$ et $x + z = 0$, car la ligne 2 est le double de la ligne 1. Donc $x = -z$, puis $2y = -3z + z = -2z$, soit $y = -z$. **La colonne** $X = (1, 1, -1)^T$ **vérifie** $CX = 0$. Si C était inversible, on aurait $X = C^{-1}CX = 0$, ce qui est faux. **Donc** C **n'est pas inversible**.

Corrigé de l'exercice 11 : Matrices triangulaires inversibles

- Soient A et B triangulaires supérieures. On a $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Or $a_{ik} = 0$ si $k < i$ et $b_{kj} = 0$ si $k > j$. Un terme non nul exige donc $i \leq k \leq j$. Si $i > j$, il n'y en a aucun. Si $i = j$, seul le terme $k = i$ subsiste. **Ainsi** AB **est triangulaire supérieure et** $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.
- La matrice T est triangulaire, de diagonale $(1, 2, -1)$ sans zéro : elle est inversible. Résolvons $TX = Y$ avec $Y = (a, b, c)^T$. La dernière ligne donne $x_3 = -c$. La deuxième donne $2x_2 = b - 4x_3 = b + 4c$, soit $x_2 = \frac{b}{2} + 2c$. La première donne $x_1 = a - 2x_2 + x_3 = a - b - 4c - c = a - b - 5c$. **Donc** $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, triangulaire supérieure de diagonale $(1, 1/2, -1)$, comme prévu. Vérification de la première ligne de TT^{-1} : $(1, -1 + 1, -5 + 4 + 1) = (1, 0, 0)$.
- Ici $u_{22} = 0$. On cherche X avec $x_3 = 0$ et $x_2 = 1$. Les lignes 2 et 3 donnent $x_3 = 0$ et $7x_3 = 0$: elles sont vérifiées. La ligne 1 donne $2x_1 + 1 = 0$, donc $x_1 = -1/2$. En multipliant par 2, **la colonne** $X = (-1, 2, 0)^T$ **vérifie** $UX = 0$: en effet, $-2 + 2 - 0 = 0$.
- Soit k le plus petit indice tel que $t_{kk} = 0$. On cherche X avec $x_k = 1$ et $x_j = 0$ pour $j > k$. Pour $i > k$, la ligne i de TX ne fait intervenir que les x_j avec $j \geq i > k$: elle est nulle. La ligne k vaut $t_{kk}x_k = 0$. Ensuite, pour $i = k-1, \dots, 1$, on résout successivement $t_{ii}x_i = -\sum_{i < j \leq k} t_{ij}x_j$, ce qui est possible car $t_{ii} \neq 0$ par minimalité de k . On obtient ainsi $X \neq 0$ avec $TX = 0$. **Donc** T **n'est pas inversible**, car sinon $X = T^{-1}TX = 0$.

Point de méthode : l'exemple de la question 3 est exactement l'algorithme de la question 4, avec $k = 2$.

Corrigé de l'exercice 12 : Symétriques et antisymétriques

1. Analyse : si $M = S + A$, alors $M^T = S^T + A^T = S - A$. En additionnant et en soustrayant, $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. D'où l'unicité. Synthèse : ces deux matrices conviennent, car $(\frac{1}{2}(M + M^T))^T = \frac{1}{2}(M^T + M)$, $(\frac{1}{2}(M - M^T))^T = -\frac{1}{2}(M - M^T)$, et leur somme vaut M . **La décomposition existe et est unique.**
2. On a $M^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Donc $M + M^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ et $M - M^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ 6 & -6 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
On vérifie que $S + A = M$.
3. Si $A^T = -A$, alors $a_{ii} = -a_{ii}$, donc $2a_{ii} = 0$ et $a_{ii} = 0$. De plus, $(A^2)^T = (A^T)^2 = (-A)^2 = A^2$. **La diagonale d'une antisymétrique est nulle, et son carré est symétrique.**
4. On a $(SS')^T = S'^T S^T = S' S$. Donc SS' est symétrique si et seulement si $SS' = S' S$. Par exemple, $S = E_{11}$ et $S' = E_{12} + E_{21}$ sont symétriques. Cependant, $SS' = E_{11}E_{12} + E_{11}E_{21} = E_{12}$ n'est pas symétrique. **Le produit de deux symétriques est symétrique exactement quand elles commutent.**

Corrigé de l'exercice 13 : Commutant d'une matrice diagonale

1. Comme $d_{ik} = 0$ pour $k \neq i$, on a $(DM)_{ij} = \sum_k d_{ik} m_{kj} = d_i m_{ij}$. De même, $(MD)_{ij} = m_{ij} d_j$. **Multiplier par D à gauche multiplie les lignes par les d_i ; à droite, cela multiplie les colonnes par les d_j .**
2. D'après la question 1, $DM = MD$ équivaut à $(d_i - d_j)m_{ij} = 0$ pour tous i, j . Si $i \neq j$, on a $d_i \neq d_j$, donc $m_{ij} = 0$. En revanche, pour $i = j$, aucune condition n'apparaît. **Donc M commute avec D si et seulement si M est diagonale.**
3. Ici $d_1 = d_2 = 1$ et $d_3 = 2$. La condition $(d_i - d_j)m_{ij} = 0$ impose $m_{ij} = 0$

exactement quand l'un des indices vaut 3 et l'autre non. **Les matrices qui commutent avec**

Δ sont les $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{K}$.

4. Le produit de matrices diagonales se fait terme à terme, donc $\Delta^m = \text{diag}(1, 1, 2^m)$. On veut $\alpha_m + \beta_m = 1$ et $\alpha_m + 2\beta_m = 2^m$. Par soustraction, $\beta_m = 2^m - 1$, puis $\alpha_m = 2 - 2^m$. Ainsi $\Delta^m = (2 - 2^m)I_3 + (2^m - 1)\Delta$. Pour $m = 0$, on retrouve bien I_3 .

Corrigé de l'exercice 14 : Puissance d'une matrice triangulaire par le binôme

1. On a $N = A + I_3 = 2E_{12} + 3E_{23}$. Donc $N^2 = 6E_{12}E_{23} = 6E_{13}$, les autres produits étant nuls. Puis $N^3 = 6E_{13}(2E_{12} + 3E_{23}) = 0$. Ainsi $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 6E_{13}$ et $N^3 = 0$.
2. La matrice $-I_3$ commute avec toute matrice, en particulier avec N . **La formule du binôme s'applique donc à $(-I_3 + N)^m$.**
3. Comme $N^k = 0$ pour $k \geq 3$, il vient

$$A^m = (-1)^m I_3 + m(-1)^{m-1}N + \binom{m}{2}(-1)^{m-2}N^2 = (-1)^m \left(I_3 - mN + \binom{m}{2}N^2 \right).$$

Pour $m \in \{0, 1\}$, cette formule reste juste car $\binom{m}{2} = 0$. Or $6\binom{m}{2} = 3m(m-1)$. Donc

$$A^m = (-1)^m \begin{pmatrix} 1 & -2m & 3m(m-1) \\ 0 & 1 & -3m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

4. Directement, la ligne 1 de A^2 vaut $-1 \times (-1, 2, 0) + 2 \times (0, -1, 3) = (1, -4, 6)$. La ligne 2 vaut $-(0, -1, 3) + 3(0, 0, -1) = (0, 1, -6)$. La ligne 3 vaut $(0, 0, 1)$. La formule donne, pour $m = 2$, les coefficients -4 , 6 et -6 . **Les deux calculs concordent.**

Corrigé de l'exercice 15 : Puissances de $2I + J$ et inverse

1. Chaque coefficient de J^2 vaut $1 + 1 + 1 = 3$, donc $J^2 = 3J$. Par récurrence, si $J^k = 3^{k-1}J$, alors $J^{k+1} = 3^{k-1}J^2 = 3^k J$. Ainsi $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \geq 1$.

2. On a $M = 2I_3 + J$, et ces deux matrices commutent. Par la formule du binôme,

$$M^p = 2^p I_3 + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} 2^{p-k} 3^{k-1} J = 2^p I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^{p-k} 3^k - 2^p \right) J.$$

La somme vaut $(2 + 3)^p = 5^p$. Donc $M^p = 2^p I_3 + \frac{5^p - 2^p}{3} J$, formule qui reste vraie pour $p = 0$.

3. Pour $p = 2$, la formule donne $M^2 = 4I_3 + 7J$. Or $7M - 10I_3 = 14I_3 + 7J - 10I_3 = 4I_3 + 7J$. Donc $M^2 = 7M - 10I_3$, c'est-à-dire $M(7I_3 - M) = 10I_3$. Ainsi $M \times \frac{1}{10}(7I_3 - M) = I_3$, et un inverse d'un côté suffit.
 M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Vérification : $3 \times 4 - 1 - 1 = 10$ et $-3 + 4 - 1 = 0$.

4. Pour $p = -1$, la formule donne $\frac{1}{2}I_3 + \frac{1/5 - 1/2}{3}J = \frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{10}J$. Ses coefficients diagonaux valent $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$, et les autres $-\frac{1}{10}$. **C'est exactement M^{-1} : la formule reste vraie pour $p = -1$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Diviseurs de zéro et nilpotents

1. Prenons $A = E_{11}$ et $B = E_{21}$. La règle des matrices élémentaires donne $AB = E_{11}E_{21} = \delta_{12}E_{11} = 0$. En revanche, $BA = E_{21}E_{11} = \delta_{11}E_{21} = E_{21} \neq 0$. **Le couple (E_{11}, E_{21}) convient.**
2. Supposons A inversible avec $AB = 0$. En multipliant à gauche par A^{-1} , on obtient $B = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$. Cela contredit $B \neq 0$. **Donc A n'est pas inversible.**
3. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$. Ainsi $A(A - 2I_2) = 0$, avec

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $AB = 0$, ce qu'un calcul direct confirme.

4. On a $N = E_{12} + 2E_{13} + 3E_{23}$. Le seul produit non nul dans N^2 est $E_{12} \times 3E_{23} = 3E_{13}$. Puis $N^3 = 3E_{13}N = 0$, car E_{13} ne se combine qu'avec E_{3l} . Comme $N^3 = 0$, on a $(I_3 - N)(I_3 + N + N^2) = I_3 - N^3 = I_3$. Donc $N^2 = 3E_{13}$, $N^3 = 0$, et $(I_3 - N)^{-1} = I_3 + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérification sur la ligne 1 : $(1, -1, -2)$ contre les colonnes donne $(1, 1 - 1, 5 - 3 - 2) = (1, 0, 0)$.

Corrigé de l'exercice 17 : Matrices nilpotentes de taille 2

- On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd & ca + dc & cb + d^2 \\ bc - a & 0 & ad + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & bc - ad & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, $(a + d)M = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd & ac + dc & ad + d^2 \\ bc - a & 0 & ad + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & bc - ad & 0 \end{pmatrix}$. La différence vaut $\begin{pmatrix} bc - a & 0 & ad + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & bc - ad & 0 \end{pmatrix} = -(ad - bc)I_2$. Donc $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0$.
- Supposons $ad - bc \neq 0$. La relation s'écrit $M((a + d)I_2 - M) = (ad - bc)I_2$, donc M est inversible. Or une matrice nilpotente n'est jamais inversible, puisque $M^q = 0$ le serait aussi. C'est absurde, donc $ad - bc = 0$. La relation devient alors $M^2 = (a + d)M$. Par récurrence, si $M^k = (a + d)^{k-1}M$, alors $M^{k+1} = (a + d)^{k-1}M^2 = (a + d)^k M$. Ainsi $ad - bc = 0$ et $M^k = (a + d)^{k-1}M$ pour tout $k \geq 1$.
- Soit M nilpotente et non nulle, avec $M^q = 0$ et $q \geq 2$. Alors $(a + d)^{q-1}M = 0$, donc $(a + d)^{q-1} = 0$, soit $a + d = 0$. Si $M = 0$, les deux conditions sont évidentes. Réciproquement, si $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$, la question 1 donne directement $M^2 = 0$. Donc M est nilpotente si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$, et dans ce cas $M^2 = 0$.
- Pour N , on a $a + d = 2 - 2 = 0$ et $ad - bc = -4 + 4 = 0$. Donc $N^2 = 0$. Comme I_2 et N commutent, le binôme donne $(I_2 + N)^m = I_2 + mN$. Ainsi $(I_2 + N)^m = \begin{pmatrix} 1 + 2m & 4m \\ -m & 1 - 2m \end{pmatrix}$.

Point de méthode : une relation polynomiale $M^2 = \alpha M + \beta I_2$ permet de tester l'inversibilité et de réduire toutes les puissances.

Corrigé de l'exercice 18 : Chemins dans un graphe orienté

1. En lisant les flèches ligne par ligne, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & , & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

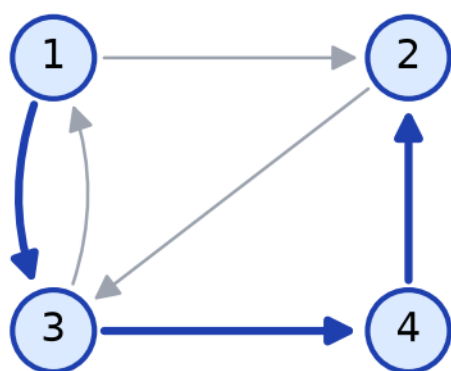
2. Pour $k = 1$, un chemin de longueur 1 est une flèche : c'est la définition de A . Supposons la propriété vraie au rang k . Un chemin de longueur $k + 1$ de i vers j se décompose de façon unique en un chemin de longueur k de i vers un sommet l , suivi d'une flèche de l vers j . Leur nombre vaut donc $\sum_l (A^k)_{il} a_{lj} = (A^{k+1})_{ij}$. **La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout $k \geq 1$.**

3. La ligne i de A^2 est la somme des lignes l de A pour les flèches $i \rightarrow l$. Par exemple, la ligne 1 vaut ligne 2 + ligne 3 = $(1, 0, 1, 1)$. De même, on multiplie A^2 par A .

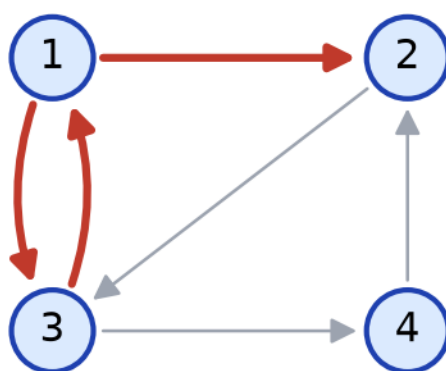
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & , & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & , & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont les deux matrices demandées. Par exemple, la ligne 3 de A^3 vaut $2 \times$ ligne 2 + ligne 3 de A , soit $(1, 0, 2, 1)$.

4. On lit $(A^3)_{12} = 2$. Les prédécesseurs de 2 sont 1 et 4, et le seul prédécesseur de 4 est 3, tout comme celui de 1. Les deux chemins sont donc $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ et $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$. La figure ci-dessous les met en évidence. De plus, $(A^3)_{33} = 2$: ce sont $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. **Il y a 2 chemins de longueur 3 de 1 vers 2, et 2 circuits de longueur 3 issus de 3.**



chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

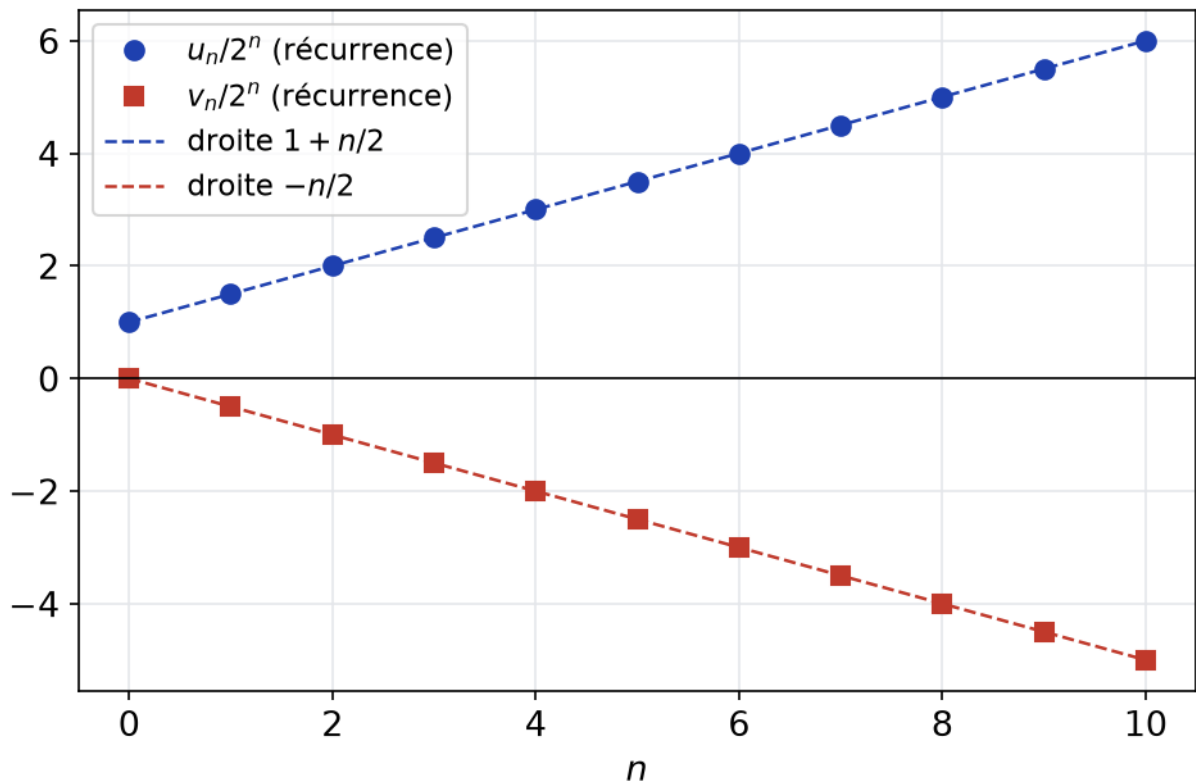


chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

5. Le nombre total est la somme des coefficients de A^2 : $3 + 2 + 3 + 1 = 9$. **Le graphe possède 9 chemins de longueur 2.**

Corrigé de l'exercice 19 : Suites récurrentes couplées

- La relation s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Par une récurrence immédiate, $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On a $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Le calcul donne $N^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $N^2 = 0$.
- Comme $2I_2$ et N commutent et que $N^2 = 0$, le binôme donne $A^n = 2^n I_2 + n 2^{n-1} N$. Ainsi $A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} n+2 & n \\ -n & 2-n \end{pmatrix}$, formule valable aussi pour $n = 0$.
- Avec $X_0 = (1, 0)^T$, X_n est la première colonne de A^n . Donc $u_n = (n+2)2^{n-1}$ et $v_n = -n2^{n-1}$. Pour $n = 2$, la récurrence donne $u_1 = 3$, $v_1 = -1$, puis $u_2 = 9 - 1 = 8$ et $v_2 = -3 - 1 = -4$. La formule donne $4 \times 2 = 8$ et $-2 \times 2 = -4$. Enfin, la figure ci-dessous montre que $u_n/2^n$ et $v_n/2^n$ sont alignés sur des droites : la partie nilpotente produit la croissance linéaire en n .



Corrigé de l'exercice 20 : Matrices de rotation du plan

1. En notant $c_\alpha = \cos \alpha$ et $s_\alpha = \sin \alpha$, on calcule

$$R(\alpha)R(\beta) = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta & -c_\alpha s_\beta - s_\alpha c_\beta \\ s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta & -s_\alpha s_\beta + c_\alpha c_\beta \end{pmatrix}.$$

Les formules d'addition donnent $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$. Donc

$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$. Comme $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, on a aussi

$R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha)$: **deux rotations commutent.**

2. Par récurrence, $R(\theta)^{m+1} = R(m\theta)R(\theta) = R((m+1)\theta)$, donc $R(\theta)^m = R(m\theta)$.
Ensuite, $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I_2$, et de même dans l'autre sens. Enfin,

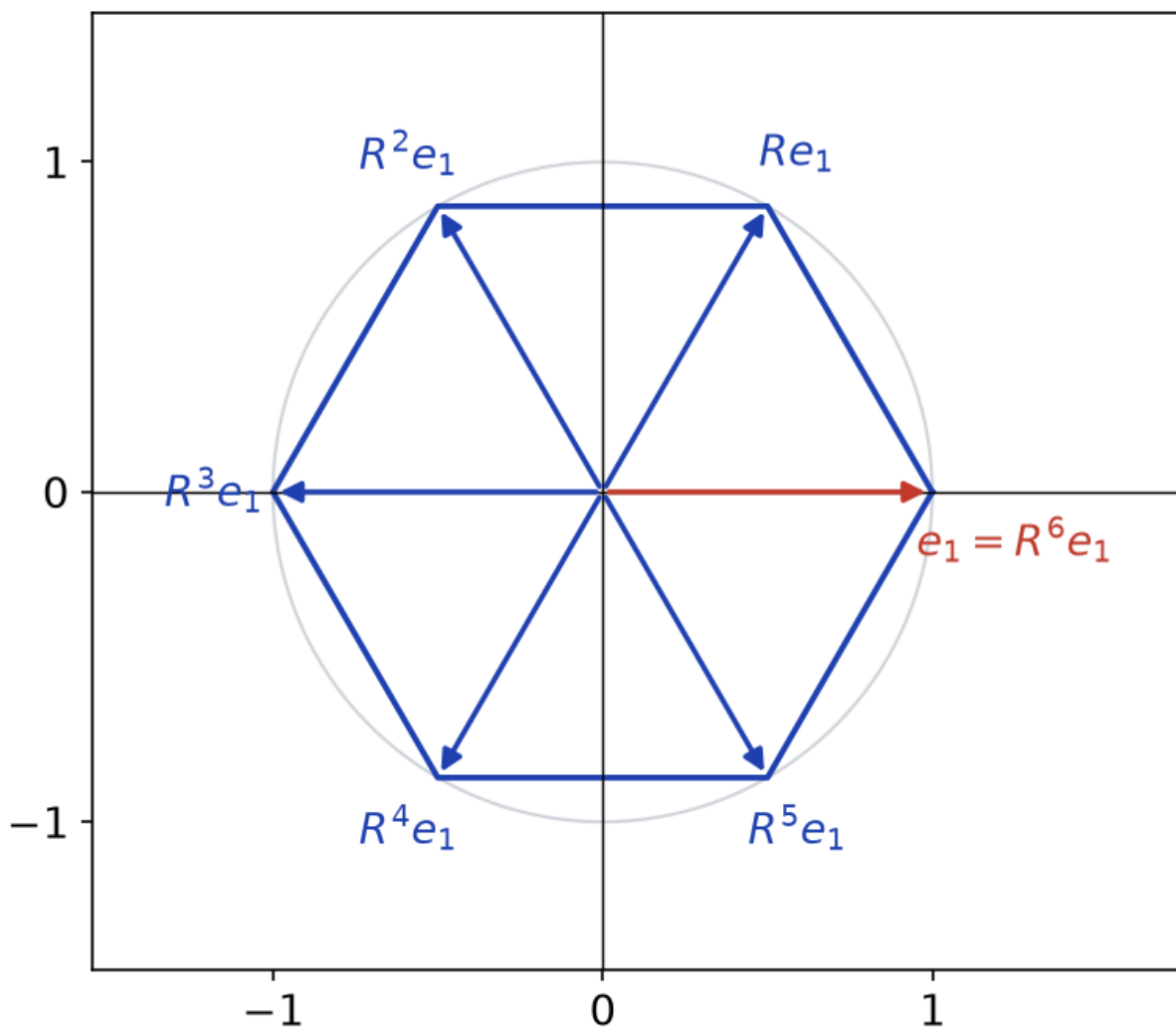
$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, qui est la transposée de $R(\theta)$. **Ainsi**

$$R(\theta)^{-1} = R(-\theta) = R(\theta)^T.$$

3. On a $A = 2 \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = 2R(\pi/3)$. Comme $2I_2$ commute avec tout,
 $A^m = 2^m R(m\pi/3)$. En particulier, $A^6 = 64R(2\pi) = 64I_2$. Ensuite,

$2026 = 6 \times 337 + 4$, donc $R(2026\pi/3) = R(4\pi/3)$. Ainsi $A^6 = 64I_2$ et $A^{2026} = 2^{2026} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

4. On a $R(\pi/3)^k e_1 = R(k\pi/3) e_1 = (\cos(k\pi/3), \sin(k\pi/3))^T$. Ces points sont sur le cercle unité, espacés d'un angle $\pi/3$. **Ce sont les six sommets d'un hexagone régulier, et** $R(\pi/3)^6 e_1 = e_1$, comme le montre la figure suivante.



Corrigé de l'exercice 21 : Centre de l'anneau des matrices carrées

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $ME_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $E_{12}M = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'égalité impose $c = 0$ et $a = d$. De même, $ME_{21} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{21}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, ce qui impose $b = 0$ et $a = d$. **Les matrices qui commutent avec E_{12} sont les $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; celles qui commutent aussi avec E_{21} sont les aI_2 .**

2. Par bilinéarité et par la règle des matrices élémentaires,

$$AE_{ij} = \sum_{k,l} a_{kl} E_{kl} E_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}, \quad E_{ij}A = \sum_{k,l} a_{kl} E_{ij} E_{kl} = \sum_{l=1}^n a_{jl} E_{il}.$$

Autrement dit, AE_{ij} place la colonne i de A en colonne j , et $E_{ij}A$ place la ligne j de A en ligne i .

3. Supposons que A commute avec toutes les matrices, en particulier avec chaque E_{ij} . On compare les coefficients des deux expressions. En position (k, j) avec $k \neq i$, seul le membre de gauche intervient : $a_{ki} = 0$. En position (i, j) , on obtient $a_{ii} = a_{jj}$. Comme i et j sont quelconques, les coefficients hors diagonale sont nuls et les coefficients diagonaux sont égaux. Réciproquement, λI_n commute avec toute matrice. **Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est formé des matrices scalaires λI_n .**
4. Pour $i \neq j$, on a $E_{ij} = (I_n + E_{ij}) - I_n$, où $I_n + E_{ij}$ est une transvection, donc inversible. De plus, $E_{ii} = D_i(2) - I_n$, où $D_i(2)$ est une dilatation inversible. Soit A commutant avec toute matrice inversible. Par bilinéarité, A commute avec chaque E_{ij} , donc avec toute matrice. **Les matrices qui commutent avec tout $GL_n(\mathbb{K})$ sont donc encore les λI_n .**

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : la matrice de Pascal

1. Avec $p_{ij} = \binom{i}{j}$, on trouve

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est triangulaire inférieure, de diagonale formée de 1, donc inversible.

2. Le système $PX = Y$ s'écrit $x_0 = y_0$, $x_0 + x_1 = y_1$, $x_0 + 2x_1 + x_2 = y_2$ et $x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3 = y_3$. On le résout de haut en bas. D'abord, $x_1 = y_1 - y_0$. Ensuite, $x_2 = y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0) = y_0 - 2y_1 + y_2$. Enfin, $x_3 = y_3 - y_0 - 3(y_1 - y_0) - 3(y_0 - 2y_1 + y_2) = -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$. **Donc**
- $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ qui semble avoir pour coefficients } (-1)^{i-j} \binom{i}{j}.$$

3. La matrice N est triangulaire inférieure stricte, de lignes $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 2, 0, 0)$ et $(1, 3, 3, 0)$. La ligne i de N^2 est $\sum_k n_{ik} \times (\text{ligne } k \text{ de } N)$. Ainsi, la ligne 2 de N^2 vaut $2 \times (1, 0, 0, 0)$, et la ligne 3 vaut $3(1, 0, 0, 0) + 3(1, 2, 0, 0) = (6, 6, 0, 0)$. De même, N^3 n'a qu'un coefficient non nul, $(N^3)_{30} = 6$. Enfin, $N^4 = 0$.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 6E_{30}, \quad N^4 = 0.$$

Comme $N^4 = 0$, on a $(I_4 + N)(I_4 - N + N^2 - N^3) = I_4 + N^4 = I_4$.

Calculons les coefficients sous la diagonale : $(1, 0) : -1$; $(2, 0) : -1 + 2 = 1$; $(2, 1) : -2$; $(3, 0) : -1 + 6 - 6 = -1$; $(3, 1) : -3 + 6 = 3$; $(3, 2) : -3$. **On retrouve exactement la matrice P^{-1} de la question 2.**

4. La ligne i de P^2 est $\sum_k \binom{i}{k} \times (\text{ligne } k \text{ de } P)$. On obtient les lignes $(1, 0, 0, 0)$, $(2, 1, 0, 0)$, $(4, 4, 1, 0)$ et $(8, 12, 6, 1)$. Par exemple, la ligne 3 vaut $(1, 0, 0, 0) + 3(1, 1, 0, 0) + 3(1, 2, 1, 0) + (1, 3, 3, 1) = (8, 12, 6, 1)$. Or $2^{3-1} \binom{3}{1} = 12$ et $2^{3-2} \binom{3}{2} = 6$. **Les coefficients de P^2 sont bien les $2^{i-j} \binom{i}{j}$.**

5. Pour $j \leq k \leq i$, on écrit les factorielles :

$$\binom{i}{k} \binom{k}{j} = \frac{i!}{k! (i-k)!} \cdot \frac{k!}{j! (k-j)!} = \frac{i!}{j! (i-j)!} \cdot \frac{(i-j)!}{(k-j)! (i-k)!} = \binom{i}{j} \binom{i-j}{k-j}.$$

Pour $i \geq j$, on en déduit, en posant $m = k - j$ et avec la formule du binôme,

$$(P^2)_{ij} = \sum_{k=j}^i \binom{i}{k} \binom{k}{j} = \binom{i}{j} \sum_{m=0}^{i-j} \binom{i-j}{m} = 2^{i-j} \binom{i}{j}.$$

Pour $i < j$, le coefficient est nul, car P^2 est triangulaire inférieure. Soit maintenant Q de

coefficients $q_{kj} = (-1)^{k-j} \binom{k}{j}$. Le même calcul donne, pour $i \geq j$,

$(PQ)_{ij} = \binom{i}{j} \sum_{m=0}^{i-j} (-1)^m \binom{i-j}{m} = \binom{i}{j} (1-1)^{i-j}$. Ce nombre vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Donc $PQ = I_{n+1}$, et un inverse d'un côté suffit pour une matrice carrée. Ainsi $P^{-1} = ((-1)^{i-j} \binom{i}{j})_{0 \leq i, j \leq n}$, et $P^2 = (2^{i-j} \binom{i}{j})$.

Point de méthode : pour vérifier une formule d'inverse conjecturée, il suffit de calculer un seul produit PQ : en taille finie, un inverse à droite est un inverse.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [calcul matriciel, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur calcul matriciel](#)
- À maîtriser avant : [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#), [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre précédent : [Structures algébriques usuelles : groupes, anneaux, corps](#)
- Chapitre suivant : [Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)