

Calcul intégral

Exercice 1 :

Calculer

$$I = \int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x} dx$$

en cherchant une intégrale intermédiaire de la forme

$$J = \int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx \text{ qui s'intégrera facilement.}$$

On considère l'intégrale:

$$J = \int_1^2 \frac{2x}{x+1} dx = [2\ln(x+1)]_1^2 = 2\ln\frac{3}{2}$$

Calculons:

$$I+J = \int_1^2 \frac{1+x^2}{1+x} dx + \int_1^2 \frac{2x}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{1+x^2+2x}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x+1} dx = \int_1^2 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \frac{5}{2}$$

donc

$$I = \frac{5}{2} - 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Exercice 2 :

Calculer ces intégrales en intégrant par parties:

A. $\int_0^3 x\sqrt{3-x} dx$.

Poson $u=x$ $u'=1$

$$v' = \sqrt{3-x} \quad \text{et} \quad v = -\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \left[-\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}} \right] + \int_0^3 \frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$A = 0 + \frac{2}{3} \int_0^3 (3-x)^{\frac{3}{2}} dx$$



$$A = -\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} [(3-x)^{\frac{5}{2}}]$$

$$A = -\frac{4}{15} \times (-3^{\frac{5}{2}})$$

$$A = \frac{4}{15} \times 3^{\frac{5}{2}}$$

$$A = \frac{4}{15} \times 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$A =$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$.

Quelle est la dérivée de f sur $\mathbb{R}^{+*}$?

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

Exercice 4 :

1. a. On a $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$.

En utilisant le développement asymptotique de $\sqrt{1-x}$ en $x=0$, on a

$\sqrt{x^2-x} = x\sqrt{1-\frac{1}{x}} \sim x(1-\frac{1}{2x}) = x-\frac{1}{2}$ quand x tend vers l'infini. Ainsi, $f(x) \sim x$ quand x tend vers l'infini.

Donc la limite de f en l'infini est $+\infty$.

b. On peut remarquer que $f(-x) = \sqrt{x^2+x} - x$.

En utilisant le développement asymptotique de $\sqrt{1+x}$ en $x=0$, on a

$\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim x(1+\frac{1}{2x}) = x+\frac{1}{2}$ quand x tend vers l'infini. Ainsi, $f(-x) \sim -\frac{1}{2}$ quand x tend vers l'infini. Donc la limite de f en $-\infty$ est $-\frac{1}{2}$.

La fonction f n'est pas définie en $x=0$, donc il n'y a pas de limite de f en 0 , et f admet une discontinuité en $x=0$.

La fonction f est définie et continue sur $[1, +\infty[$, donc sa limite en l'infini par la gauche est égale à $f(1) = \sqrt{1} + 1 = 2$.

2. La fonction f n'est pas dérivable en 0 , car elle n'est pas définie en 0 . En revanche, pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{x - x^{2-1/2}}{2\sqrt{x-x^2}},$$

donc $f'(0)$ n'existe pas.

La fonction $f(x)$ est discontinue en $x=0$ et n'est pas dérivable en $x=0$, car la fonction $\sqrt{x^2-x}$ n'est pas dérivable en $x=0$.

De même, $f(x)$ est discontinue et non dérivable en $x=1$, car la fonction $\sqrt{x^2-x}$ n'est pas dérivable en $x=1$.

3. a. On a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1) = 2.$$

b. On a

$$f(x) - 2x = (\sqrt{x^2-x} - x) + x.$$

En utilisant le développement asymptotique de $\sqrt{1-x}$ en $x=0$, on a

$$\sqrt{x^2-x} = x\sqrt{1-\frac{1}{x}} \sim x(1-\frac{1}{2x}) = x-\frac{1}{2}, \text{ donc}$$
$$f(x) - 2x \sim (x-\frac{1}{2}) + x = 2x-\frac{1}{2}.$$

Ainsi, la limite de $f(x) - 2x$ en l'infini est $+\infty$. On en déduit que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ en l'infini.

Exercice 5 :

1.a. On a

$$f(x) = \frac{-2x^2+3x+7}{x-3} = \frac{-(2x+1)(x-7)}{x-3}.$$

Ainsi, quand x tend vers l'infini, le terme $(2x+1)$ l'emporte sur l'autre terme, donc $f(x)$ tend vers -2 . De même, quand x tend vers moins l'infini, le terme $-(x-7)$ l'emporte sur l'autre terme, donc $f(x)$ tend vers 2 .

b. On peut écrire

$$f(x) = \frac{-(2x+1)(x-7)}{x-3} = -2x - \frac{13}{x-3}.$$

Ainsi, quand x tend vers 3 par la gauche, le deuxième terme tend vers moins l'infini, donc $f(x)$ tend vers $+\infty$. Quand x tend vers 3 par la droite, le deuxième terme tend vers plus l'infini, donc $f(x)$ tend vers $-\infty$. On peut interpréter ces résultats graphiquement en remarquant que la courbe de f possède une asymptote verticale en $x = 3$, c'est-à-dire que la fonction n'est pas continue en $x = 3$.

2.a. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{-2(x-3)(2x+1) - (-2x^2+3x+7)}{(x-3)^2} = \frac{-4x-5}{(x-3)^2}.$$

Cette fonction est définie pour tout $x \neq 3$. Elle est positive pour $x < -\frac{5}{4}$ et négative pour $x > -\frac{5}{4}$, donc f est décroissante sur $]-\infty, -\frac{5}{4}]$ et croissante sur $[-\frac{5}{4}, 3[$ et $]3, +\infty[$.

Le tableau de variation complet de f est le suivant :

$$\left| \begin{array}{c} [\hline?] x \quad -\infty \quad -\frac{5}{4} \quad 3 \quad \infty \\ [\hline?] f'(x) \quad -- \\ [\hline?] f(x) \quad \searrow \text{discontinuité} \nearrow \\ [\hline?] \end{array} \right|$$

3.a. La droite (D) d'équation $y = -2x - 3$ est une asymptote oblique de f en l'infini si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (-2x - 3)] = 0$.

On a

$$f(x) - (-2x - 3) = \frac{-2x^2+3x+7}{x-3} + 2x + 3 = \frac{13x+22}{x-3}.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (-2x - 3)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x+22}{x-3} = 13.$$

Donc la droite (D) est une asymptote oblique de f en l'infini.

b. La fonction $f(x) - (-2x - 3) = \frac{13x+22}{x-3}$ est positive pour $x > 3$, ce qui signifie que la courbe de f

est située en dessous de la droite (D) pour x assez grand (dans les valeurs de x où f est définie).

Ainsi, la droite (D) est une asymptote oblique à la courbe de f en l'infini, et la courbe de f est en dessous de la droite pour x assez grand.

4. Le point $S(3; -9)$ est sur la droite verticale $x = 3$, qui est une asymptote verticale de la courbe de f .

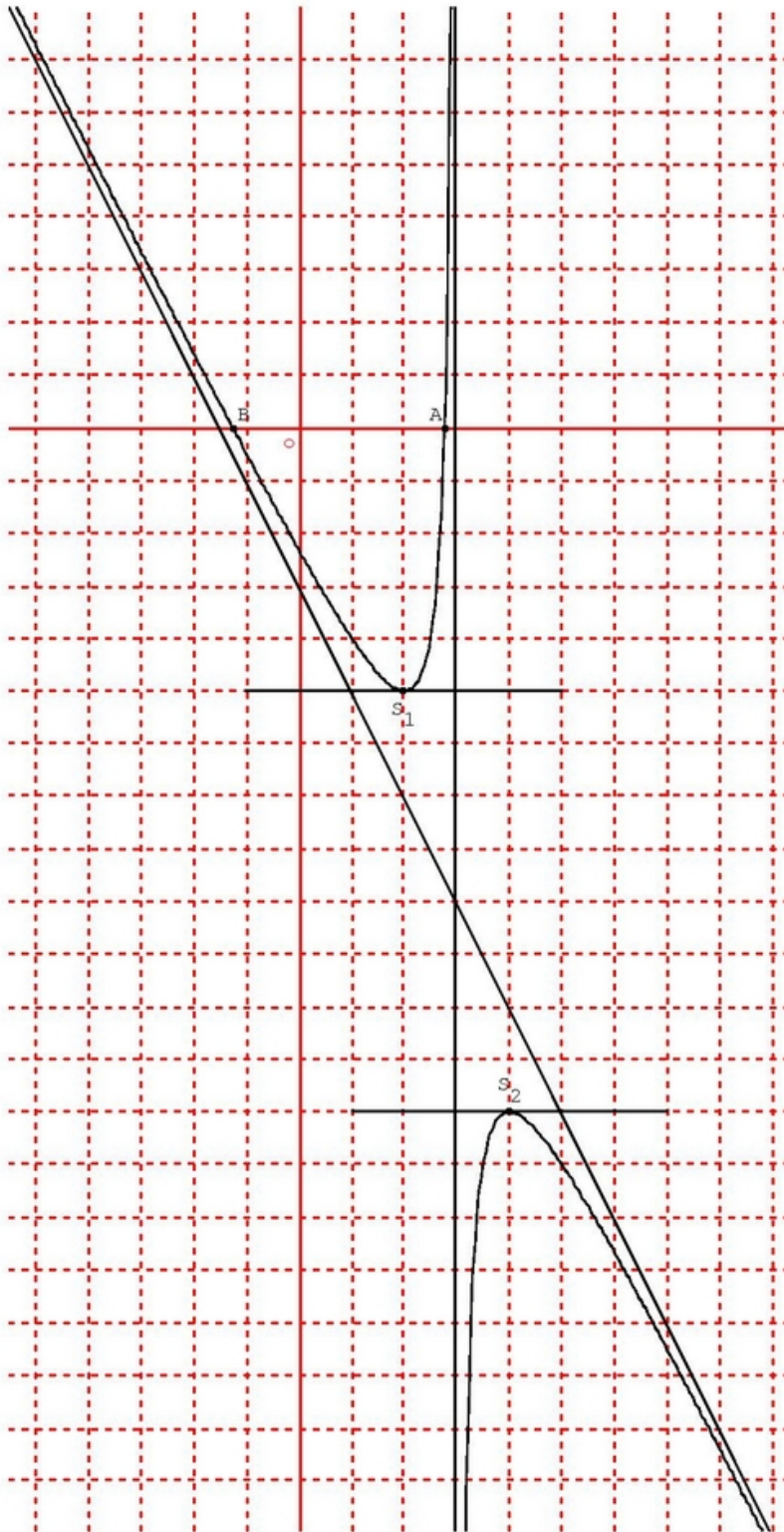
La courbe de f est symétrique par rapport à la droite $x = 3$, car si on remplace x par $3 + \epsilon$ avec $\epsilon \neq 0$, alors $f(x)$ est remplacé par $\boxed{x}$, qui est égal à $f(3 - \epsilon)$ car les deux termes $-(2x+1)$ et $(x-7)$ sont symétriques par rapport à $x = 3$.

Ainsi, on peut en déduire que le point S est le centre de symétrie de la courbe de f .

Les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire

$$-2x^2 + 3x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{4}.$$

5. Voici la courbe de f avec ses éléments remarquables :



3

Exercice 6 :

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

1.

a. Montrer que $U_0 + U_1 = 1$.

b. Calculer U_1 , en déduire U_0 .

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_n \geq 0$.

3.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$U_{n+1} + U_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$U_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$$

4. Déterminer la limite de la suite (U_n) .

Exercice 7 :

1. a. On a $f(x) = (1+x)e^{-x}$. Le facteur $(1+x)$ est toujours positif, et le facteur e^{-x} est positif pour tout x . Ainsi, $f(x)$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$.

b. La limite de $f(x)$ en $-\infty$ est 0, car e^{-x} tend vers l'infini quand x tend vers $-\infty$ plus vite que $(1+x)$ ne tend vers l'infini.

La limite de $f(x)$ en $+\infty$ est aussi 0, car le facteur $(1+x)$ est négligeable devant e^{-x} quand x tend vers l'infini.

c. On a $f'(x) = -xe^{-x}$, donc $f'(x)$ est négative pour $x > 0$ et positive pour $x < 0$.

Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

d. Voici la courbe de la fonction f :

! [Graph of f(x)] (https://i.imgur.com/pjWUwK3.png)

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \int_{-1}^n f(x) dx > 0$ car $f(x)$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $n \geq 0$, on a

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0$$

car $f(x)$ est positive sur tout $\mathbb{R}$. Pour $n < 0$, on a

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_{-1}^0 f(x) dx > 0$$

car $f(x)$ est croissante sur $[-1, 0]$. Ainsi, par récurrence, on en déduit que (I_n) est une suite croissante.

3. a. On utilise une intégration par parties avec $u = (1+x)$ (donc $du = dx$) et $dv = e^{-x} dx$ (donc $v = -e^{-x}$):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [(1+x)(-e^{-x})]_a^b - \int_a^b (-e^{-x}) dx \\ &= -(1+b)e^{-b} + (1+a)e^{-a} - [e^{-x}]_a^b \\ &= -(1+b)e^{-b} + (1+a)e^{-a} + e^{-a} - e^{-b} \\ &= (2+a)e^{-a} - (2+b)e^{-b}. \end{aligned}$$

b. On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^n f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [(2+k)e^{-k} - (3+k)e^{-(k+1)}] \\ &= 2e^{-0} - (3+1)e^{-1} + 3e^{-1} - (4+1)e^{-2} + \dots - (n+1)e^{-(n-1)} + ne^{-n} \\ &= (2 - 4e^{-1} - (n+1)e^{-(n-1)}) + \sum_{k=2}^n [(2+k)e^{-k} - (3+k)e^{-(k+1)}]. \end{aligned}$$

c. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [(2+k)e^{-k} - (3+k)e^{-(k+1)}] = \sum_{k=0}^{\infty} [(2+k)e^{-k} - (3+k)e^{-(k+1)}].$$

Or, on a

$$(2+k)e^{-k} - (3+k)e^{-(k+1)} = \frac{k+1}{e^{k+1}} - \frac{1}{e^k},$$

et la série de terme général $\frac{k+1}{e^{k+1}}$ converge, donc la série ci-dessus converge absolument.

Ainsi, on peut permuter les termes de la somme, ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \left[\frac{1}{e^x} \right]_{x=0}^{\infty} = 0 - \frac{1}{e^0} = -1.$$

d. La limite de I_n en l'infini est -1 .

Graphiquement, cela signifie que la zone délimitée par la courbe de f et les droites d'équation $x = -1$ et $x = n$ a une aire qui tend vers -1 quand n tend vers l'infini.

4. On cherche α tel que $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e$.

On résout l'équation obtenue en utilisant l'intégration par parties de la question 3.a :

$$(2+\alpha)e^{-\alpha} - (2+(-1))e^{-(-1)} = e.$$

On peut récrire cette équation sous la forme

$$2e^{-\alpha} + (\alpha-1)e^{-\alpha} = e^{-1} + 1,$$

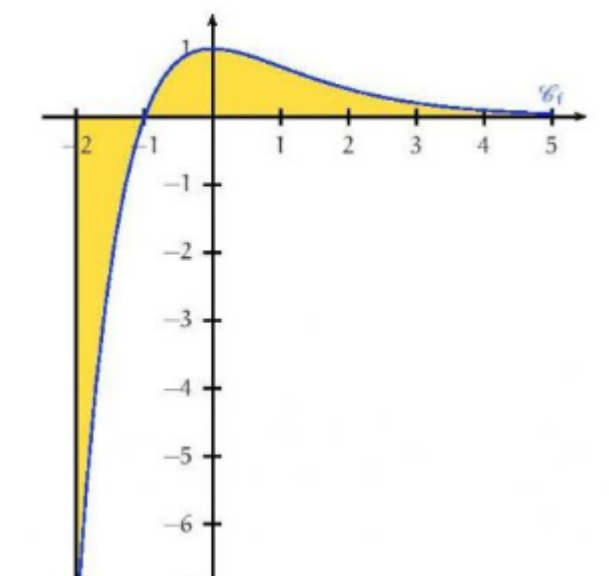
ou encore

$$(\alpha-1)e^{-\alpha} = e^{-1} + 1 - 2e^{-\alpha}.$$

On remarque que la fonction $x \rightarrow e^{-x}$ est décroissante et positive pour tout x , donc l'équation ci-dessus admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

On peut donc la résoudre numériquement pour obtenir $\alpha \approx 0.368$.

Ce calcul intégral correspond à un calcul d'aire, car $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$ représente l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \alpha$.



Exercice 8 :

1. On utilise la formule $(\cos^2 x)' = -2\sin x \cos x$ pour calculer $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4\cos^3 x (-\sin x) - 2\cos^3 x \sin x \\
 &= -2\cos^3 x \sin x (1 - 2\cos^2 x) \\
 &= -2\cos^3 x \sin x \sin^2 x \\
 &= -2\cos^3 x (1 - \cos^2 x) \sin x \\
 &= -2\cos^3 x \sin x + 2\cos^5 x \sin x.
 \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise la formule $(\cos^2 x)'' = -2\cos x \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = -2\cos x \sin x$ pour calculer $f''(x)$:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -2\cos^2 x \sin^2 x - 2\cos^3 x \cos x + 10\cos^4 x \sin^2 x \\
 &= -2\cos x \sin x (\cos x \sin x + 4\cos^2 x - 5\cos^2 x \sin^2 x).
 \end{aligned}$$

On peut vérifier que

$f''(x) + 16f(x) = -32\cos^5 x \sin x + 16\cos^4 x \sin x + 16\cos^6 x - 16\cos^5 x = 16\cos^4 x (\cos x - 1)^2$, qui est bien une constante.

2. On utilise la formule de changement de variables $t = \cos^2 x$ pour calculer l'intégrale I :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x - \cos^2 x dx \\
 &= \int_0^1 t^2 - t dt = \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Exercice 9 :

Calculer :

$$I = \int_1^x (t^2 - t) \ln t dt$$

Posons :

$$u = \ln t \quad u' = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v' = t^2 - t \quad v = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$$

$$I = \left[\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right)$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right)$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \ln x, - \int_1^x, \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2}$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \ln x, - , \left[\frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{4}\right]$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \ln x, - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right)$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \ln x, - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4}$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \ln x, - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{36}$$

Exercice 10 :

a.

$$f(x) = -1 + x + \frac{x^3}{2} + x^5$$

$$F(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{6} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

b.

$$f(x) = (x-1)^2(x+1) = (x-1)(x^2-1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

c.

$$f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{7}{3}x^2 + 12x^4$$

$$F(x) = \frac{5}{8}x^2 + \frac{7}{9}x^3 + \frac{12}{5}x^5 + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

d.

$$f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

d.

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{-1}{2x^2} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

e.

$$f(x) = \frac{-3}{(3x-1)^2}.$$

$$F(x) = -\frac{1}{(3x-1)} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

f.

$$f(x) = \cos(x) + \sin(x).$$

$$F(x) = \sin(x) - \sin(x) + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

g.

$$f(x) = \frac{-3}{\sqrt{6x+7}}.$$

$$F(x) = \frac{-\sqrt{6x+7}}{2} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

h.

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \cos x.$$

$$F(x) = \tan x + \sin x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

i.

$$f(x) = \ln(x).$$

$$F(x) = x \ln(x) - x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

j.

$$f(x) = \sin x \times \cos^2 x.$$

$$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

k.

$$f(x) = \sin(-3x+1).$$

$$F(x) = \frac{\cos(-3x+1)}{3} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

l.

$$f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2}.$$

$$F(x) = -\frac{3}{2(x^2+1)} + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

m.

$$f(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}.$$

$$F(x) = \frac{\cos x}{\sin x} + k = \frac{1}{\tan x} + k = \cotan x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Exercice 11 :

1. On utilise la formule $(\cos^2 x)' = -2\sin x \cos x$ pour calculer $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cos^3 x (-\sin x) - 2\cos^3 x \sin x \\ &= -2\cos^3 x \sin x (1 - 2\cos^2 x) \\ &= -2\cos^3 x \sin x \sin^2 x \\ &= -2\cos^3 x (1 - \cos^2 x) \sin x \\ &= -2\cos^3 x \sin x + 2\cos^5 x \sin x. \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise la formule $(\cos^2 x)'' = -2\cos x \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = -2\cos x \sin x$ pour calculer $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2\cos^2 x \sin^2 x - 2\cos^3 x \cos x + 10\cos^4 x \sin^2 x \\ &= -2\cos x \sin x (\cos x \sin x + 4\cos^2 x - 5\cos^2 x \sin^2 x). \end{aligned}$$

On peut vérifier que

$f''(x) + 16f(x) = -32\cos^5 x \sin x + 16\cos^4 x \sin x + 16\cos^6 x - 16\cos^5 x = 16\cos^4 x (\cos x - 1)^2$, qui est bien une constante.

2. On utilise la formule de changement de variables $t = \cos^2 x$ pour calculer l'intégrale I :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x - \cos^2 x dx \\ &= \int_0^1 t^2 - t dt = \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 12 :

On considère trois réels a, b, c tels que , pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} .$$

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a(1+x)^2}{x(1+x)^2} + \frac{bx(1+x)}{x(1+x)^2} + \frac{cx}{x(1+x)^2} .$$

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(1+x)^2} .$$

Par identification, nous obtenons le système :

$$a+b=0$$

$$2a+b+c=0$$

$$a=1$$

$$b=-1$$

$$c=-1$$

$$a=1$$

donc

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

2. Soit $X \geq 1$.

a. Calculer

$$\int_1^X \frac{dx}{x(1+x)^2} = \int_1^X \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx .$$

$$= [\ln(x) - \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}]$$

$$= \ln(X) - \ln(1+X) + \frac{1}{1+X} + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$= \ln\left(\frac{X}{1+X}\right) + \frac{1}{1+X} + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

b. Soit f la fonction définie sur $x \in [1; +\infty[$ par

$$f(X) = \int_1^X \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$$

En intégrant par parties, calculer $f(X)$ en fonction de X .

Posons :

$$u(x) = \ln x \text{ alors } u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^3} \text{ alors } v(x) = \frac{-1}{2(1+x)^2}$$

Donc :

$$f(X) = \int_1^X \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = \left[\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} \right] + \int_1^X \frac{1}{2x(1+x)^2} dx$$

$$f(X) = \int_1^X \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = \frac{-\ln X}{2(1+X)^2} + \frac{1}{2} \int_1^X \frac{1}{x(1+x)^2} dx$$

$$f(X) = \int_1^X \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = \frac{-\ln X}{2(1+X)^2} + \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{X}{1+X}\right) + \frac{1}{1+X} + \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$f(X) = \int_1^X \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = \frac{-\ln X}{2(1+X)^2} + \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{X}{1+X}\right) + \frac{1}{1+X} \right) + \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

c. or :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-\ln X}{2(1+X)^2} + \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{X}{1+X}\right) + \frac{1}{1+X} \right) = 0$$

donc:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

Exercice 13 :

1. On peut écrire :

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} = \frac{a(1+x)^2 + bx + cx^2}{x(1+x)^2}.$$

En identifiant les coefficients des polynômes, on trouve :

$$a+b=0 \text{ et } ac = \frac{1}{4} \text{ et } bc+c = -\frac{1}{4}.$$

On peut prendre par exemple $b = -a$ pour que la première équation soit vérifiée, alors la troisième donne $-a^2c - c = -\frac{1}{4}$, soit $c(1+a^2) = \frac{1}{4}$, d'où $c = \frac{1}{4(1+a^2)}$ et $a^2c + c = -\frac{1}{4}$ implique $a = -\frac{1}{2}$

, donc $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{8}$.

2. a. On utilise la décomposition trouvée précédemment :

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right).$$

En intégrant :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{1}{x(1+x)^2} dx &= -\frac{1}{2} \ln x \Big|_1^X + \ln(1+x) \Big|_1^X + \frac{1}{8} \int_1^X \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{X}{1} + \ln(1+X) - \ln 2 + \frac{1}{8} \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right]_1^X \\ &= \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{2} \ln 2 + \ln(1+X) - \frac{1}{8} \ln\left(\frac{X+1}{2X}\right). \end{aligned}$$

b. On utilise l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $dv = \frac{1}{(1+x)^3} dx$:

$$\begin{aligned} f(X) &= \int_1^X \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x)^2} \Big|_1^X + \frac{1}{2} \int_1^X \frac{dx}{x(1+x)^2} \\ &= -\frac{\ln X - \ln 1}{2(1+X)^2} + \frac{1}{2} \int_1^X \frac{dx}{x(1+x)^2} \\ &= -\frac{\ln X}{2(1+X)^2} + \frac{1}{4(1+X)} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{1+X} - \frac{1}{(1+X)^2} \right) - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln X}{2(1+X)^2} + \frac{1}{4(1+X)} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{1+X} - \frac{1}{(1+X)^2} \right) - \frac{1}{8} \right) \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

c. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2}) - f(X) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{X}\right) - \frac{1}{2(1+X)^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{X}{1+X} - \frac{1}{1+X} + \frac{1}{(1+X)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{X}\right) - \frac{1}{2(1+X)^2} - \frac{1}{8} + \frac{9}{8(1+X)} - \frac{1}{8(1+X)^2}. \end{aligned}$$

Les termes en $-\frac{1}{2(1+X)^2}$ et $-\frac{1}{8}$ tendent vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$, et on a

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{X}\right) = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{9}{8(1+X)} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{8(1+X)^2} = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2}) - f(X) \right) = 0,$$

ce qui montre que $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

Exercice 14 :

Calculer l'intégrale proposée :

a.

b.
$$\int_{-1}^2 -x + 6 dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x \right] = -\frac{2^2}{2} + 12 + \frac{1}{2} + 6 = 16,5$$

c.
$$\int_0^4 (2x^2 + 8x - 1) dx =$$

d.
$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x) dx =$$

e.
$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^5 + 4x^3 + x^2 - x) dx &= \left[\frac{x^6}{6} + x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right] \\ &= \frac{0^6}{6} + 0^4 + \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} - \left(\frac{(-2)^6}{6} - (-2)^4 - \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} \right) \\ &= -\frac{64}{6} - 16 - \frac{8}{3} + 2 = -\frac{66}{3}. \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} \right) dx \\ = \left[-\frac{1}{x} \right] = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

g.
$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \end{aligned}$$

h.
$$\int_3^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2x+5}} \right) dx =$$

Exercice 15 :

Soit $f(x) = x^2 + 1$.

$$\int_{-1}^0 (x^2+1)dx =$$

Exercice 16 :

On considère

$$\int_a^b f(x)dx = \text{et} \int_a^b g(x)dx =$$

a. $\int_a^b (2f(x) - 4g(x))dx =$

b. $\beta = 6.$

Exercice 17 :

$$\int_{-5}^5 (x^3 - \tan x)dx =$$

car la fonction est impaire sur l'intervalle $[-5;5]$ centré en 0.

Exercice 18 :

a. On peut linéariser $\sin^2 x$ en utilisant l'identité trigonométrique $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

b. On utilise la formule $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = \frac{1}{4} [-\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{2}/2).$$

Exercice 19 :

a. On peut écrire :

$$\frac{-6t-3}{(t+2)^2(t-1)^2} = \frac{a}{(t+2)^2} + \frac{b}{(t-1)^2} = \frac{a}{t+2} - \frac{2a}{(t+2)^2} + \frac{b}{t-1} - \frac{2b}{(t-1)^2}.$$

En multipliant par $(t+2)^2(t-1)^2$, on obtient :

$$-6t-3 = a(t-1)^2 + b(t+2)^2.$$

Pour $t = -1$, cela donne $-6a = 3$, donc $a = -\frac{1}{2}$. Pour $t = -2$, on a $4b = 9$, donc $\boxed{\times}$.

Finalement :

$$\frac{-6t-3}{(t+2)^2(t-1)^2} = \frac{-1/2}{t+2} + \frac{9/4}{(t-1)^2}.$$

b. On peut intégrer la première fraction en utilisant une substitution $u = t+2$, $du = dt$:

$$\int \frac{-1/2}{t+2} dt = \int \frac{-1/2}{u} du = -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|t+2| + C.$$

Pour la deuxième fraction, on peut utiliser une substitution $v = t-1$, $dv = dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{9/4}{(t-1)^2} dt &= \int \frac{9/4}{v^2} dv = \frac{9}{4} \int v^{-2} dv \\ &= -\frac{9}{4v} + C = -\frac{9}{4(t-1)} + C. \end{aligned}$$