

Calcul différentiel

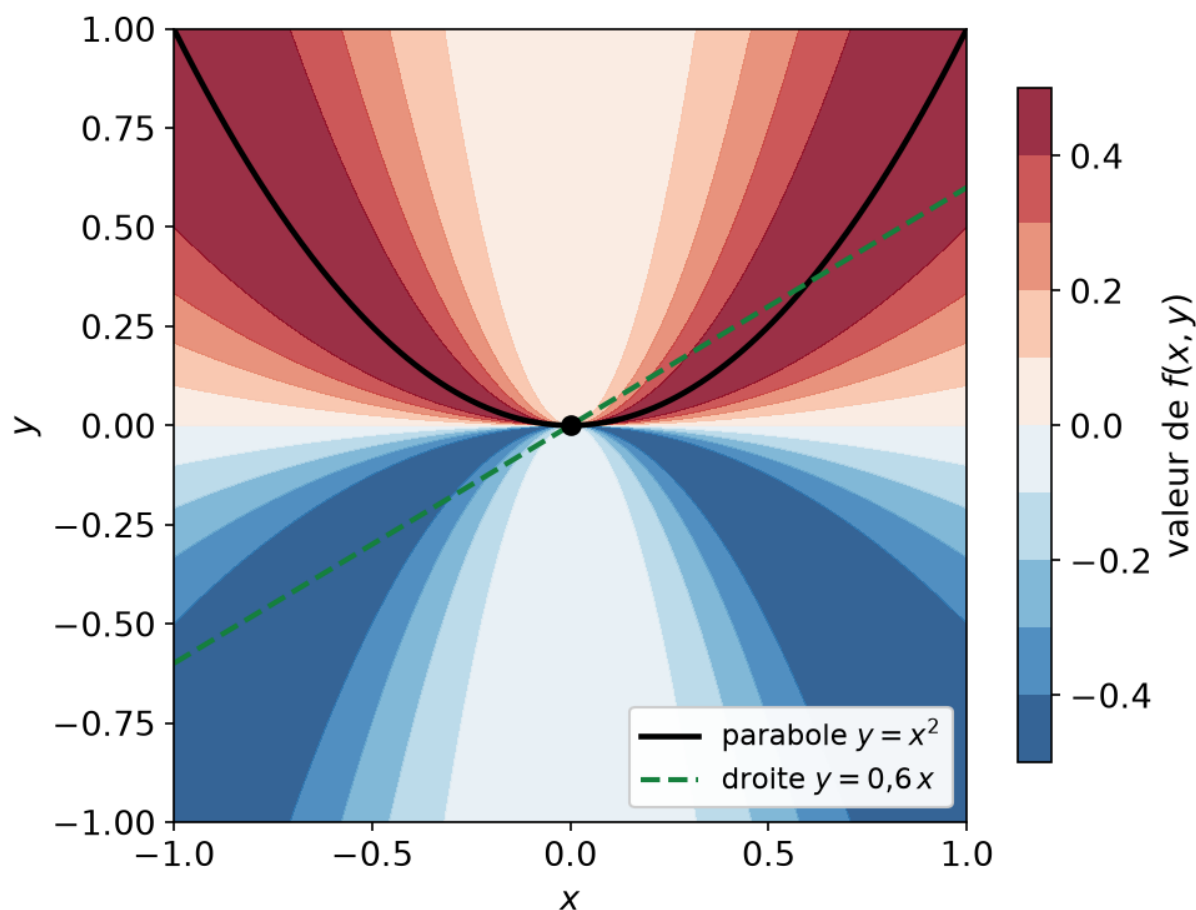
Exercice 1 : Dérivée selon un vecteur par la définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y$, le point $a = (1, 2)$ et le vecteur $v = (3, -1)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Calculer les dérivées partielles $\partial_1 f(x, y)$ et $\partial_2 f(x, y)$ en tout point.
2. Calculer $D_v f(a)$ en dérivant en 0 la fonction $\varphi : t \rightarrow f(a + tv)$.
3. Justifier que f est différentiable en a et retrouver $D_v f(a)$ à l'aide des dérivées partielles.
4. Déterminer $\nabla f(a)$, puis le vecteur unitaire u pour lequel $D_u f(a)$ est maximal, ainsi que la valeur de ce maximum.

Exercice 2 : Dérivées directionnelles sans continuité

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La figure ci-dessous représente ses valeurs au voisinage de l'origine.



1. Soit $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $D_v f(0, 0)$ existe et la calculer, en distinguant $k = 0$ et $k \neq 0$.
2. L'application $v \rightarrow D_v f(0, 0)$ est-elle linéaire ? Qu'en déduire ?
3. Montrer que, pour tout réel m , $f(x, mx) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.
4. Calculer $f(x, x^2)$ pour $x \neq 0$. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 3 : Matrices jacobiniennes et composition

On considère $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définies par

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz, \\ x^2 - y + z^2 \end{pmatrix}, \quad G(u, v) = \begin{pmatrix} u + v, \\ u - v, \\ uv \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que F et G sont de classe C^1 et calculer leurs matrices jacobiniennes en tout point.
2. Écrire $dF(a)(h_1, h_2, h_3)$ pour $a = (1, -1, 2)$.
3. Calculer $J_{F \circ G}(1, 0)$ à l'aide de la règle de la chaîne.
4. Vérifier le résultat en calculant directement $F \circ G$.

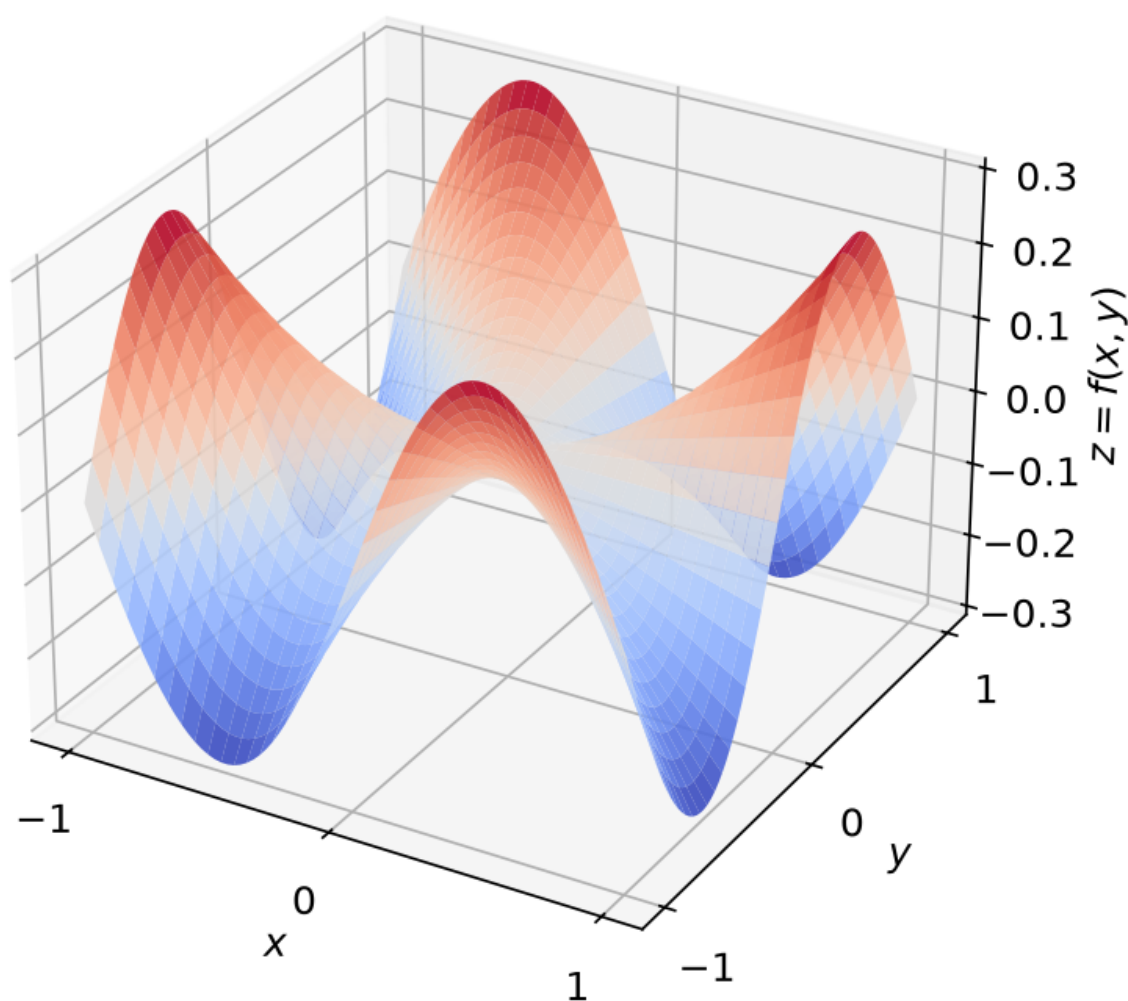
Exercice 4 : Norme euclidienne et forme quadratique

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $N(x) = \|x\|$ la norme euclidienne.

1. Montrer que N est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et que $\nabla N(a) = \frac{a}{\|a\|}$.
2. Montrer que N n'est pas différentiable en 0 .
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $q(x) = \langle u(x), x \rangle$. Montrer que q est différentiable sur E et que $\nabla q(a) = (u + u^*)(a)$, où u^* est l'adjoint de u . Que devient cette formule si u est symétrique ?
4. Application : dans $\mathbb{R}^2$, on prend pour u l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Expliciter $q(x, y)$ et vérifier la formule du gradient.

Exercice 5 : Une fonction de classe C^1 par ses dérivées partielles

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Son graphe est représenté ci-dessous.



1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer $\partial_x f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. Vérifier que $f(y, x) = -f(x, y)$ et en déduire $\partial_y f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
3. Calculer $\partial_x f(0, 0)$ et $\partial_y f(0, 0)$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
5. Calculer $\partial_x f(0, y)$ et $\partial_y f(x, 0)$ pour x, y réels.

Exercice 6 : Dérivée le long d'un cercle

Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\nabla f(x, y)$, puis $(f \circ \gamma)'(t)$ par la règle de la chaîne.
2. Retrouver ce résultat en calculant directement $f(\gamma(t))$.
3. En déduire les valeurs maximale et minimale de f sur le cercle unité, ainsi que les points où elles sont atteintes.
4. Vérifier qu'en un point où le maximum est atteint, ∇f est colinéaire au vecteur position. Interpréter.

Exercice 7 : Gradient et tangente à une ellipse

Soit $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, la ligne de niveau $\mathcal{C} = \{(x, y) : f(x, y) = 8\}$ et le point $A = (2, 1)$.

1. Vérifier que $A \in \mathcal{C}$ et calculer $\nabla f(A)$.
2. Déterminer $T_A \mathcal{C}$, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .
3. On paramètre $\mathcal{C}$ par $\gamma(t) = (2\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$. Vérifier directement que $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$ pour tout t , et expliquer ce résultat sans calcul.
4. Dans quelle direction unitaire f croît-elle le plus vite à partir de A ? Avec quelle dérivée directionnelle?

Exercice 8 : Plan tangent à un ellipsoïde

Soit $\mathcal{S}$ l'ellipsoïde d'équation $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ dans $\mathbb{R}^3$ euclidien.

1. Vérifier que $A = (1, 1, 1) \in \mathcal{S}$ et déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en A .
2. Justifier que le plan tangent est défini en tout point de $\mathcal{S}$.
3. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan d'équation $x + y + z = 0$, et donner une équation de ces plans tangents.

Exercice 9 : Plan tangent à la selle de cheval

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = x^2 - y^2$.

1. Écrire $\mathcal{S}$ comme une ligne de niveau d'une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, et vérifier que dg ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.
2. Déterminer une équation du plan tangent $P_{a,b}$ à $\mathcal{S}$ au point $(a, b, a^2 - b^2)$.
3. Déterminer $P_{0,0}$ et l'intersection $\mathcal{S} \cap P_{0,0}$.
4. Déterminer $P_{1,1}$ et montrer que $\mathcal{S} \cap P_{1,1}$ est la réunion de deux droites que l'on précisera.

Exercice 10 : Équation de transport et changement de variables linéaire

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 3 \partial_x f(x, y) + 2 \partial_y f(x, y) = 0. \quad (\mathcal{E})$$

1. Montrer que $\psi : (x, y) \rightarrow (2x - 3y, y)$ est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^2$ et expliciter ψ^{-1} .
2. Pour f de classe C^1 , on pose $g = f \circ \psi^{-1}$. Exprimer $\partial_v g(u, v)$ à l'aide des dérivées partielles de f .

3. Résoudre $(\mathcal{E})$.
4. Déterminer la solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie $f(x, 0) = \sin x$ pour tout réel x . Interpréter géométriquement les lignes de niveau des solutions.

Exercice 11 : Coordonnées polaires sur un demi-plan

Soit $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $V =]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$ et $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

1. Montrer que Φ est une bijection de V sur U , de classe C^1 , dont la réciproque $(x, y) \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$ est de classe C^1 .
2. Pour $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on pose $g = f \circ \Phi$. Exprimer $r \partial_r g(r, \theta)$ et $\partial_\theta g(r, \theta)$ à l'aide des dérivées partielles de f .
3. Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur U telles que $x \partial_x f + y \partial_y f = x^2 + y^2$ sur U .

Exercice 12 : Fonctions homogènes et relation d'Euler

Soit $n \geq 1$, $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour tous $x \in U$ et $t > 0$. On suppose f de classe C^1 sur U .

1. Montrer que si f est homogène de degré α , alors $\sum_{i=1}^n x_i \partial_i f(x) = \alpha f(x)$ pour tout $x \in U$.
2. Réciproquement, on suppose cette relation vérifiée. Pour $x \in U$ fixé, étudier $\varphi(t) = t^{-\alpha} f(tx)$ sur $]0, +\infty[$ et conclure.
3. Vérifier la relation d'Euler pour $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ en calculant ses dérivées partielles.

4. On prolonge cette fonction par $f(0, 0) = 0$. Montrer qu'une fonction homogène de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$, différentiable en 0, est linéaire. En déduire que ce prolongement n'est pas différentiable en $(0, 0)$, bien qu'il y soit continu.

Exercice 13 : Différentielle du déterminant

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H_1, \dots, H_n$ celles de H .

- Pour $n = 2$, calculer directement $d(\det)(A)(H)$ et vérifier que $d(\det)(A)(H) = \text{tr}(\text{com}(A)^T H)$.
- Dans le cas général, justifier que $d(\det)(A)(H) = \sum_{j=1}^n \det(C_1, \dots, H_j, \dots, C_n)$. En déduire $d(\det)(I_n)(H) = \text{tr } H$.
- Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. En écrivant $\det(A + H) = \det(A) \det(I_n + A^{-1} H)$, montrer que $d(\det)(A)(H) = \det(A) \text{tr}(A^{-1} H)$.
- Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\delta(t) = \det(\exp(tB))$. Montrer que $\delta'(t) = \text{tr}(B) \delta(t)$, puis que $\det(\exp(tB)) = e^{t \text{tr } B}$.

Exercice 14 : Différentielle de l'inversion matricielle

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ et on note $\varphi(A) = A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert et que φ est de classe C^1 .
- En différentiant $A \varphi(A) = I_n$, montrer que $d\varphi(A)(H) = -A^{-1} H A^{-1}$.
- Retrouver ce résultat directement : vérifier que, si $A + H$ est inversible,

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1} H A^{-1} = (A + H)^{-1} H A^{-1} H A^{-1},$$

puis conclure.

- Calculer la différentielle de $A \rightarrow A^2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis celle de $A \rightarrow A^{-2}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.
- Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 . Exprimer la dérivée de $t \rightarrow M(t)^{-1}$, puis la vérifier pour $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 : Produit vectoriel et loi des aires

On se place dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, muni du produit vectoriel $\wedge$.

- Justifier que $B : (x, y) \rightarrow x \wedge y$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et donner $dB(a, b)(h, k)$.
- Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux fois dérivable. Montrer que $(\gamma \wedge \gamma')' = \gamma \wedge \gamma''$.
- On suppose que $\gamma''(t)$ est colinéaire à $\gamma(t)$ pour tout t . Montrer que $L = \gamma \wedge \gamma'$ est constant, puis que, si $L \neq 0$, la trajectoire est contenue dans un plan que l'on précisera.
- Exemple : $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t, 0)$. Vérifier l'hypothèse de la question 3 et calculer L . On admet que l'aire balayée par le segment $[0, \gamma(t)]$ entre les instants t_1 et t_2 vaut $\frac{1}{2} |L| (t_2 - t_1)$: que vaut-elle ici ?

Exercice 16 : Inégalité des accroissements finis

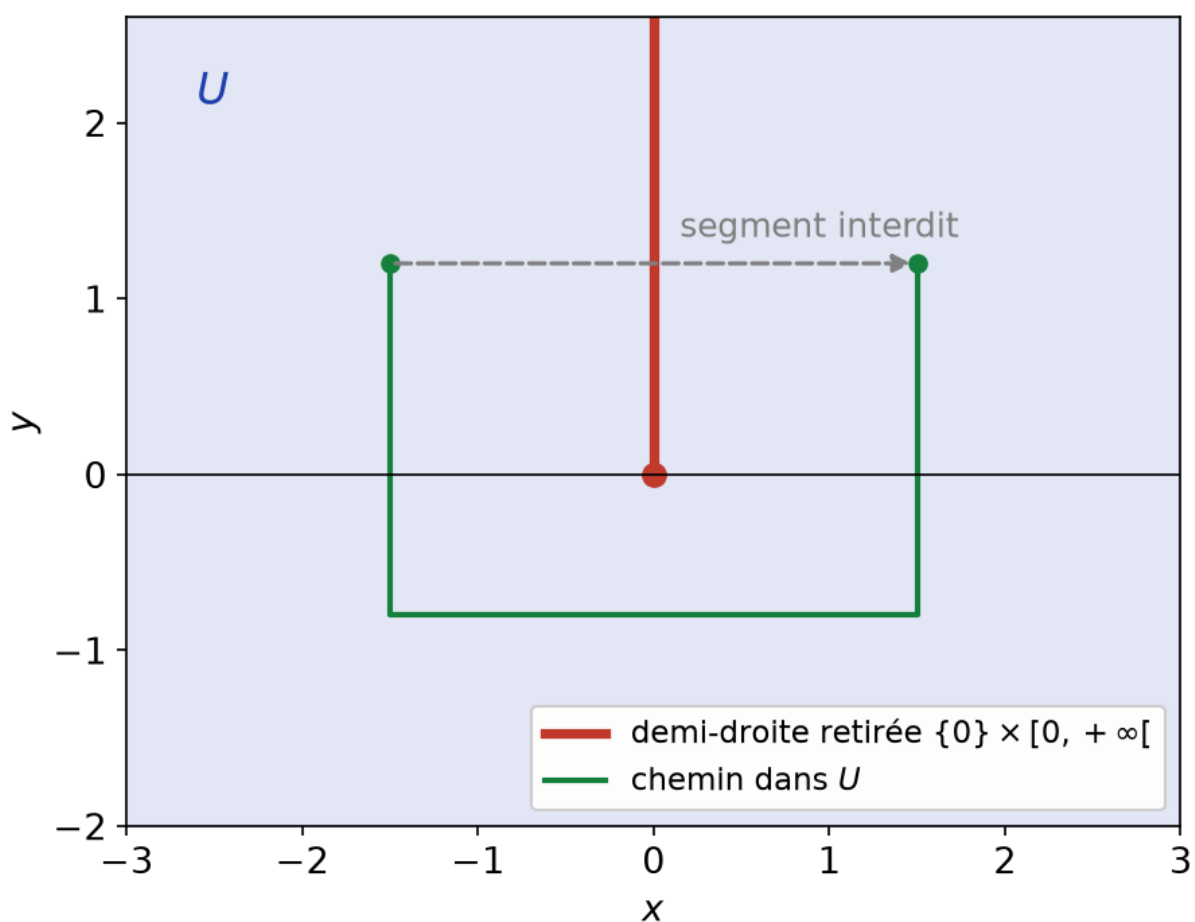
Soit $f(x, y) = \sin x \cos y$ sur $\mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne.

- Justifier que f est de classe C^1 , calculer $\nabla f(x, y)$ et montrer que $|\nabla f(x, y)| \leq 1$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}^2$. À l'aide de l'intégrale de df le long du segment $[a, b]$, montrer que $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.
- Montrer que la constante 1 est optimale.

4. En déduire que, pour tous réels x, x', y, y' ,
- $$|\sin x \cos y - \sin x' \cos y'| \leq \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Exercice 17 : Dérivée partielle nulle sur un ouvert non convexe

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [0, +\infty[)$, le plan privé d'une demi-droite verticale, représenté ci-dessous.



1. Montrer que U est un ouvert connexe par arcs.
2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $df = 0$ sur U . Que peut-on dire de f ?
3. On définit f sur U par $f(x, y) = y^2$ si $x > 0$ et $y > 0$, et $f(x, y) = 0$ sinon. Montrer que f est de classe C^1 sur U et que $\partial_x f = 0$ sur U , mais que f ne dépend pas que de y .

4. Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout y , l'ensemble $\{x : (x, y) \in W\}$ soit un intervalle. Montrer que si g est différentiable sur W avec $\partial_x g = 0$, alors $g(x, y)$ ne dépend que de y . Pourquoi U ne vérifie-t-il pas cette hypothèse ?

Exercice 18 : Espaces tangents à la sphère et aux groupes de matrices

1. Soit E euclidien et $S = \{x \in E : |x| = 1\}$. Montrer, à l'aide de la seule définition, que $T_x S = x^\perp$ pour tout $x \in S$.
2. Retrouver ce résultat avec le théorème sur l'espace tangent à une ligne de niveau.
3. Montrer que l'espace tangent en I_n au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques. On pourra utiliser $t \rightarrow \exp(tA)$.
4. Soit $SL_n(\mathbb{R}) = \{M : \det M = 1\}$. Déterminer $T_{I_n} SL_n(\mathbb{R})$ à l'aide de l'exercice 13.

Exercice 19 : Espace tangent en un point singulier

Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, réunion des deux axes, et $g(x, y) = xy$.

1. Montrer que $T_{(0,0)} X = X$. Est-ce un sous-espace vectoriel ?
2. Calculer $dg(0, 0)$. Pourquoi le théorème sur les lignes de niveau ne s'applique-t-il pas ?
3. Déterminer $T_{(1,0)} X$ par la définition, puis par le théorème.
4. Soit $Y = \{(x, y) : y = |x|\}$. Montrer que $T_{(0,0)} Y = \{(0, 0)\}$.

Exercice 20 : Problème : différentiabilité des normes usuelles

Sur $\mathbb{R}^2$, on note $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$ et $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Soit N une norme quelconque sur un espace $E \neq \{0\}$ de dimension finie. Montrer que N n'est pas différentiable en 0 .
2. Montrer que N_1 est différentiable en (a, b) si et seulement si $ab \neq 0$, et calculer alors $\nabla N_1(a, b)$.
3. Montrer que N_∞ est différentiable en (a, b) si et seulement si $|a| \neq |b|$, et calculer alors $dN_\infty(a, b)$.
4. Rappeler où N_2 est différentiable. Décrire géométriquement, pour chacune des trois normes, l'ensemble des points de non-différentiabilité.
5. Montrer que, en tout point p où N_1 est différentiable, $dN_1(p)(p) = N_1(p)$. Généraliser à une norme quelconque différentiable en $p \neq 0$.

Exercice 21 : Problème : fonctions radiales

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on pose $g = f \circ \Phi$.

1. Justifier que Φ est surjective de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ sur U , que g est de classe C^1 , et exprimer $\partial_\theta g$ et $r \partial_r g$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. Montrer l'équivalence entre : (i) $y \partial_x f = x \partial_y f$ sur U ; (ii) il existe h de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telle que $f(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2})$ sur U .
3. On suppose (ii). Montrer que $\nabla f(x, y) = \frac{h'(r)}{r} (x, y)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Décrire les lignes de niveau de f .
4. Déterminer les fonctions radiales f de classe C^1 sur U telles que $x \partial_x f + y \partial_y f = (x^2 + y^2) f$.
5. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur U telles que

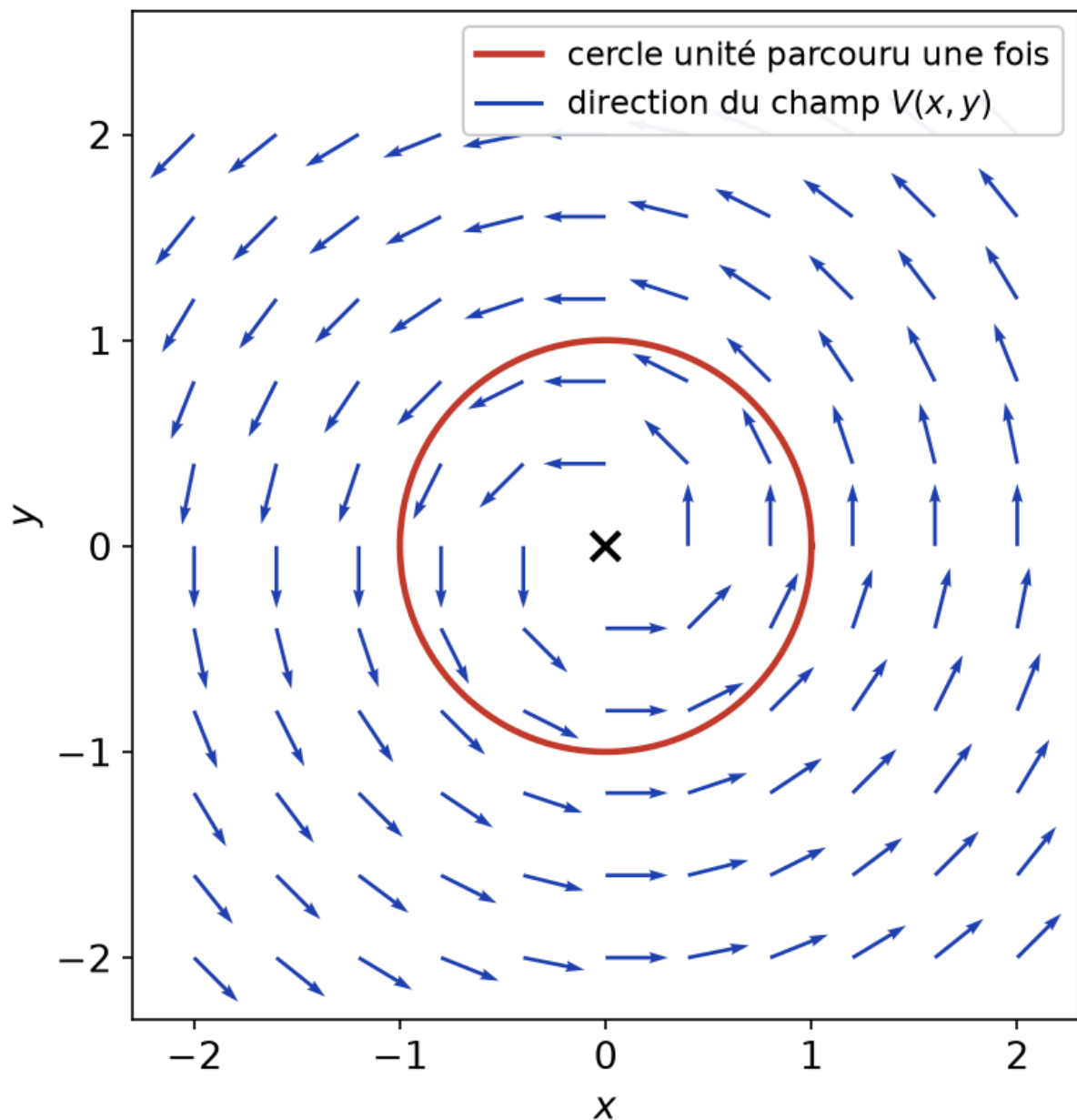
$$\nabla f(x, y) = \frac{(x, y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Exercice 22 : Problème : un champ qui n'est pas un gradient

Sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on considère le champ $V = (P, Q)$ défini par

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

La figure ci-dessous représente la direction de ce champ, qui « tourne » autour de l'origine.



1. Vérifier que $\partial_y P = \partial_x Q$ sur U .
2. On suppose qu'il existe f de classe C^1 sur U telle que $\nabla f = V$. En intégrant df le long de $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0, 1]$, aboutir à une contradiction.
3. Soit $H =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Montrer que $f_0(x, y) = \arctan(y/x)$ vérifie $\nabla f_0 = V$ sur H , puis déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur H telles que $\nabla f = V$.
4. Soit $U' = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer que $x + r > 0$ sur U' , puis que $\theta(x, y) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x+r}\right)$ vérifie $\nabla \theta = V$ sur U' .
5. Conclure : de quoi dépend l'existence d'une fonction dont V est le gradient ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [calcul différentiel, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#), [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#)
- Chapitre précédent : [Exponentielle de matrice et systèmes différentiels](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions de classe \$C^k\$ et optimisation](#)
- Le même thème en L3 : [calcul différentiel, exercices de maths en L3](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)