

Calcul différentiel

Exercice 1 : Différentielle d'une forme quadratique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel et l'on pose $q(x) = \langle Ax, x \rangle$.

1. Montrer que $B(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ est bilinéaire continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En déduire que q est différentiable et que $dq(x)(h) = \langle (A + {}^tA)x, h \rangle$.
2. Donner $\nabla q(x)$. Que devient-il lorsque A est symétrique ?
3. Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $x = (1, -1)$, calculer $\nabla q(x)$ de deux façons.
4. Soient $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables. Calculer la dérivée de $t \rightarrow \langle u(t), v(t) \rangle$. En déduire que si $\|u(t)\|$ est constante, alors $u'(t)$ est orthogonal à $u(t)$ pour tout t .

Exercice 2 : Matrice jacobienne d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

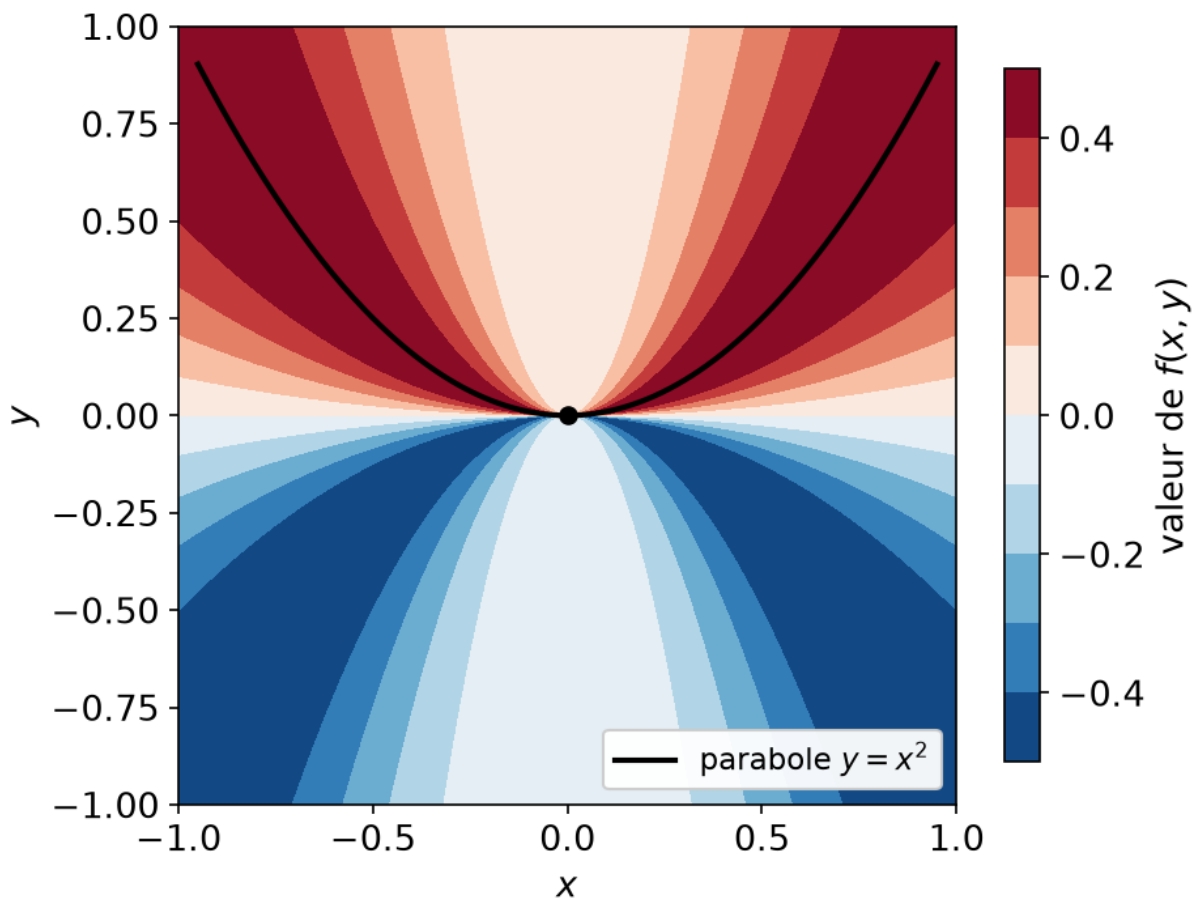
On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y, \\ e^{x-y}, \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer la matrice jacobienne $J_f(x, y)$.
3. En déduire $df(1, 1)(h, k)$ pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

4. Soit $g(t) = f(t^2, t)$. Calculer $g'(1)$ par la règle de la chaîne, puis vérifier par un calcul direct.

Exercice 3 : Dérivées directionnelles sans continuité

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La figure ci-dessous représente les valeurs de f près de l'origine.



1. Montrer que $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout (x, y) .
2. Soit $v = (a, b) \neq (0, 0)$. Montrer que f admet en $(0, 0)$ une dérivée selon v et la calculer.
3. L'application $v \rightarrow D_v f(0, 0)$ est-elle linéaire ?

4. Calculer $f(x, x^2)$ pour $x \neq 0$. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Est-elle différentiable en $(0,0)$?

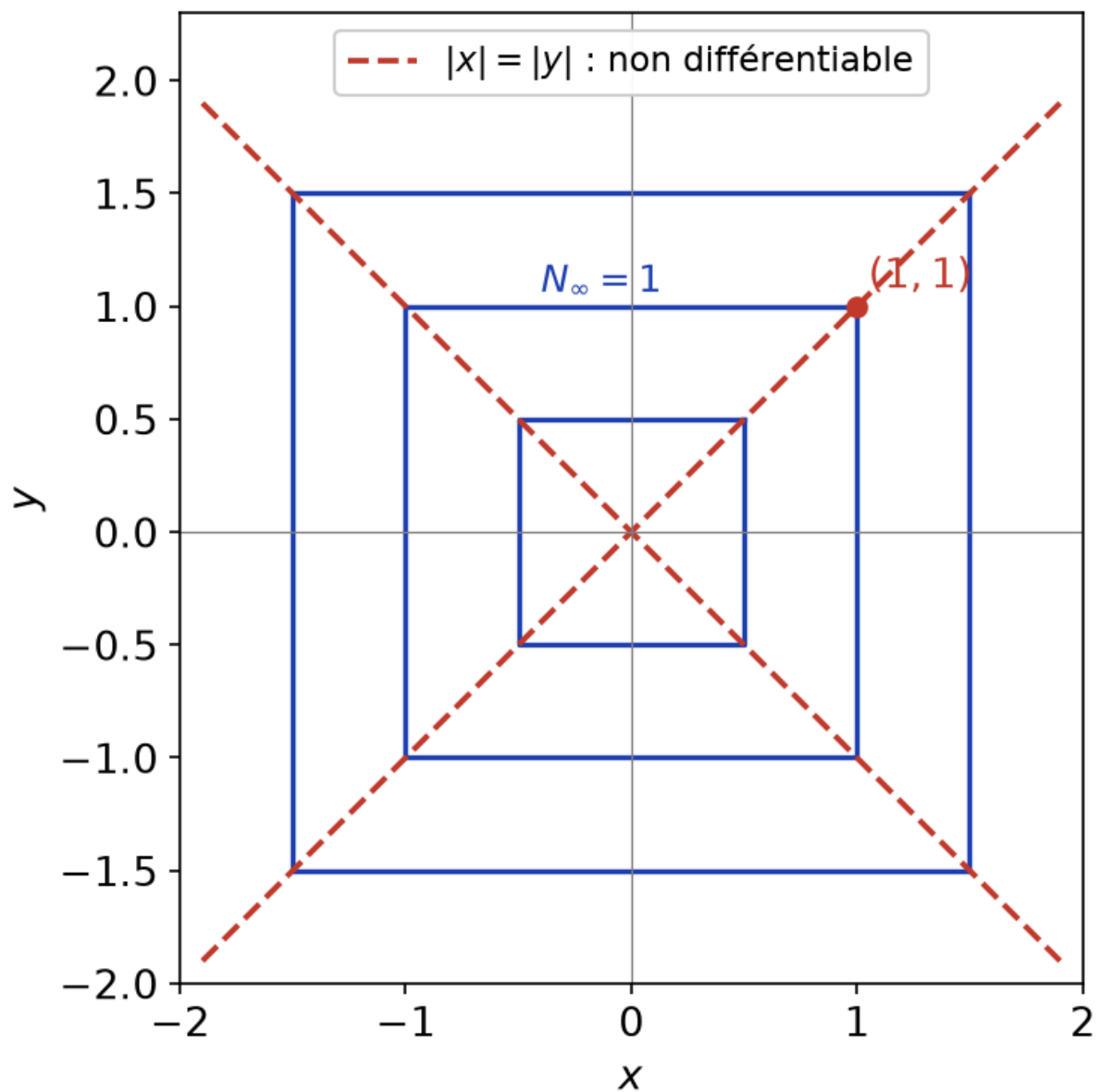
Exercice 4 : Différentielle de la norme euclidienne

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $N(x) = |x|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

1. Montrer que N est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $dN(x)(h) = \frac{\langle x, h \rangle}{|x|_2}$.
2. Montrer que N n'est pas différentiable en 0 .
3. Montrer que N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer la norme subordonnée de $dN(x)$.

Exercice 5 : Différentiabilité de la norme infinie

On note $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$ sur $\mathbb{R}^2$. La figure ci-dessous montre quelques sphères de cette norme et les deux diagonales.



1. Soit (x_0, y_0) avec $|x_0| > |y_0|$. Montrer que N_∞ est différentiable en (x_0, y_0) et donner sa différentielle.
2. Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les limites à droite et à gauche en 0 de $\frac{N_\infty(1+th, 1+tk) - 1}{t}$.
3. En déduire que N_∞ n'est pas différentiable en $(1, 1)$.
4. Déterminer l'ensemble des points où N_∞ est différentiable.

Exercice 6 : Puissances et trace sur un espace de matrices

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre. Pour $p \geq 1$, on pose $f_p(M) = M^p$ et $g_p(M) = \text{tr}(M^p)$.

1. Montrer par récurrence que f_p est différentiable et que

$$df_p(M)(H) = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i}.$$

2. En déduire que $dg_p(M)(H) = p \text{tr}(M^{p-1}H)$.

3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$. Déterminer le gradient de g_p en M .

4. Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $df_2(M)(H)$ et comparer avec $2MH$.

Exercice 7 : Différentielle de l'inversion matricielle

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre vérifiant $|I_n| = 1$, par exemple une norme subordonnée. On note $\iota(M) = M^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit H tel que $|H| < 1$. Montrer que $I_n + H$ est inversible et que $(I_n + H)^{-1} = I_n - H + R(H)$ avec $|R(H)| \leq \frac{|H|^2}{1 - |H|}$.
3. En déduire que ι est différentiable en tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, avec $d\iota(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.
4. Montrer que ι est de classe C^1 .

5. Pour $|t| < 1$, soit $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la dérivée en 0 de $t \rightarrow A(t)^{-1}$ de deux façons.

Exercice 8 : Différentielle du déterminant

On travaille sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni d'une norme quelconque.

1. Justifier que $\det$ est de classe C^1 .
2. En développant $\det(I_n + tH)$ à l'aide de la formule définissant le déterminant, montrer que $d\det(I_n)(H) = \text{tr}(H)$.
3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d\det(M)(H) = \det(M) \text{tr}(M^{-1}H) = \text{tr}({}^t\text{com}(M) H)$.
4. Montrer que la formule $d\det(M)(H) = \text{tr}({}^t\text{com}(M) H)$ reste vraie pour toute matrice M .
5. Vérifier cette formule directement pour $n = 2$.

Exercice 9 : Dérivées partielles en coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

1. Exprimer $\partial_r F$ et $\partial_\theta F$ à l'aide des dérivées partielles de f .
2. Montrer que $(\partial_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta F)^2 = |\nabla f|^2$, le gradient étant pris en $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
3. Vérifier ces formules pour $f(x, y) = x^2 - y^2$.

4. On suppose que $x \partial_2 f(x,y) - y \partial_1 f(x,y) = 0$ pour tout (x,y) . Montrer que $f(x,y)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 10 : Fonctionnelles intégrales sur $C([0,1])$

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de $\|u\|_\infty = \sup_{[0,1]} |u|$. On pose $\varphi(u) = \int_0^1 u(t)^2 dt$ et $\psi(u) = \int_0^1 \sin(u(t)) dt$.

1. Montrer que φ est différentiable sur E , avec $d\varphi(u)(h) = 2 \int_0^1 u(t)h(t) dt$. Montrer que φ est de classe C^1 .
2. Montrer que $|\sin(a+b) - \sin a - b \cos a| \leq \frac{b^2}{2}$ pour tous réels a, b . En déduire que ψ est différentiable et calculer $d\psi(u)$.
3. Montrer que ψ est de classe C^1 .
4. Calculer $d\psi(u_0)$ pour la fonction constante $u_0 = \frac{\pi}{2}$. Interpréter.
5. On munit maintenant E de la norme $\|u\|_1 = \int_0^1 |u|$. Montrer que φ n'est différentiable en aucun point pour cette norme.

Exercice 11 : Différentiable mais pas de classe C^1

Soit $g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $g(0,0) = 0$. On note

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer $\partial_1 g$ sur cet ouvert.
2. Montrer que g est différentiable en $(0,0)$ et que $dg(0,0) = 0$.
3. Montrer que $\partial_1 g(x,0)$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0^+$.
4. Conclure : g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe C^1 .

Exercice 12 : Une application contractante du plan

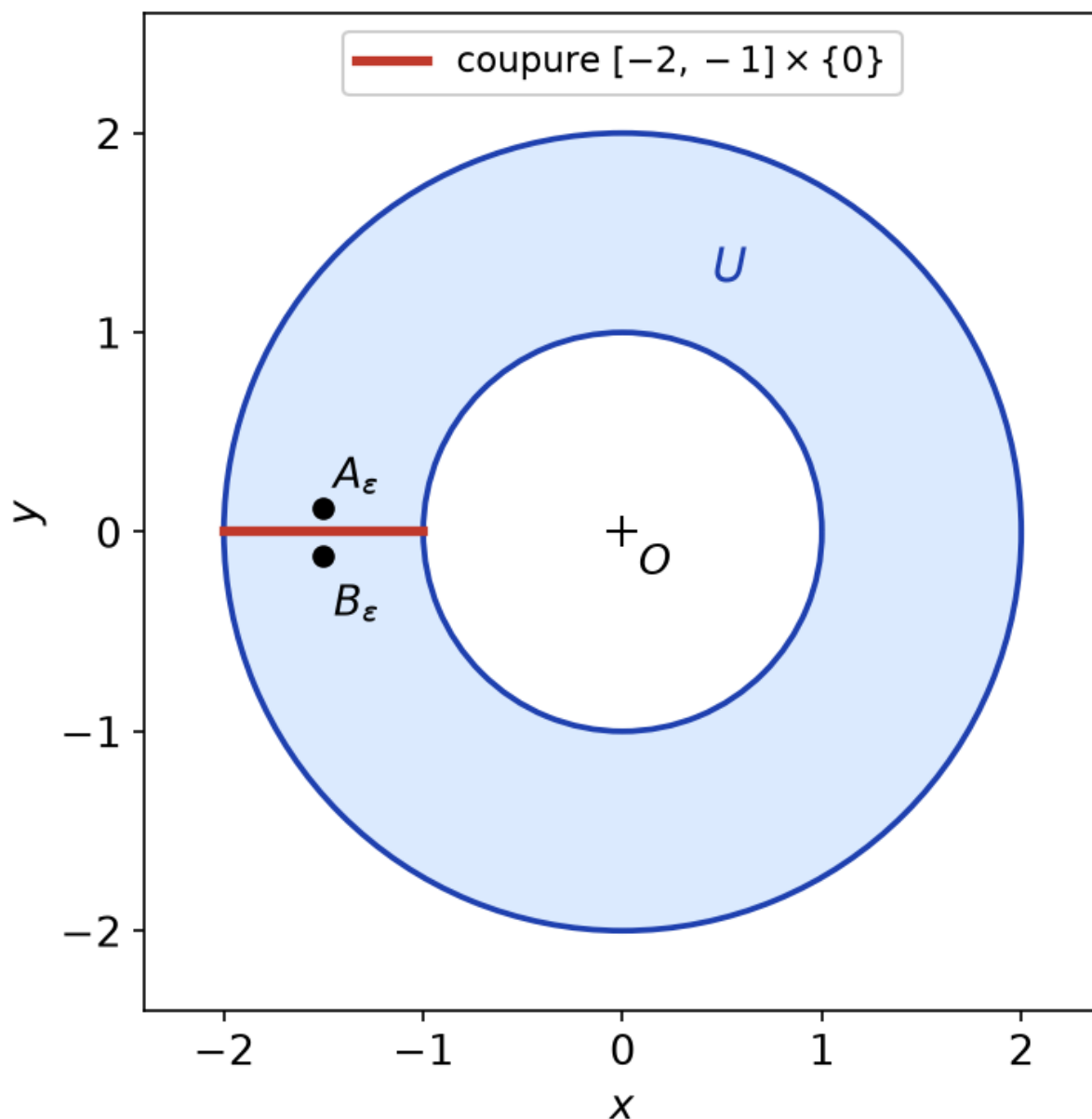
On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et l'on pose $F(x,y) = \left(\frac{1}{3}\sin(x+y), \frac{1}{3}\cos(x-y) \right)$.

1. Calculer la matrice jacobienne $J = J_F(x,y)$.
2. Calculer ${}^t J J$, puis montrer que la norme subordonnée de $dF(x,y)$ est au plus $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
3. En déduire que F est $\frac{\sqrt{2}}{3}$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que le système $x = \frac{1}{3}\sin(x+y)$, $y = \frac{1}{3}\cos(x-y)$ admet une unique solution, et qu'elle appartient à $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^2$.

Exercice 13 : Accroissements finis sur un ouvert non convexe

Soit U l'anneau $\{1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$ privé du segment $[-2, -1] \times \{0\}$, représenté ci-dessous. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta(x,y) \in]-\pi, \pi[$ l'argument principal, de sorte que $x = r \cos \theta$ et

$y = r \sin \theta$. On admet que θ est de classe C^1 sur U .



1. En dérivant la relation $y \cos \theta - x \sin \theta = 0$, montrer que $\nabla \theta(x, y) = \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2} \right)$.
2. En déduire que $|d\theta(x, y)| < 1$ pour tout $(x, y) \in U$.
3. Pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on pose $A_\varepsilon = \left(-\frac{3}{2}, \varepsilon \right)$ et $B_\varepsilon = \left(-\frac{3}{2}, -\varepsilon \right)$. Calculer $\theta(A_\varepsilon) - \theta(B_\varepsilon)$ et sa limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. La fonction θ est-elle 1-lipschitzienne sur U ?
4. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas l'inégalité des accroissements finis. Montrer que θ est 1-lipschitzienne sur toute boule ouverte incluse dans U .

Exercice 14 : Différentielle nulle et connexité

1. Donner un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , de différentielle nulle, mais non constante.
2. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $\partial_1 f = 0$ sur U . Montrer que $f(x, y) = f(x', y)$ dès que (x, y) et (x', y) sont dans U .
3. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \geq 0\}$. On pose $f(x, y) = y^2$ si $x > 0$ et $y > 0$, et $f(x, y) = 0$ sinon. Montrer que f est de classe C^1 sur U , que $\partial_1 f = 0$, et que la conclusion de la question 2 est fausse.
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $df(x)(x) = 0$ pour tout x . Montrer que f est constante.

Exercice 15 : Formule de Taylor à l'ordre 2 pour un polynôme

Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f en tout point.
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(1, 1)$, puis vérifier qu'ici $f(1+h, 1+k) = -1 + 3(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3$.
4. Montrer que $h^2 - hk + k^2 \geq \frac{1}{2}(h^2 + k^2)$. En déduire que $(1, 1)$ est un minimum local de f .
5. Montrer que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f .

Exercice 16 : Contre-exemple au théorème de Schwarz

Soit $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

1. Vérifier que $f(x,y) = xy - \frac{2xy^3}{x^2+y^2}$ hors de l'origine.
2. Calculer $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sur $\mathbb{R}^2$, y compris en $(0,0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer $\partial_2(\partial_1 f)(0,0)$ et $\partial_1(\partial_2 f)(0,0)$.
5. Que peut-on en conclure sur la régularité de f ?

Exercice 17 : Développement à l'ordre 2 de l'inverse et du déterminant

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre. On note $\iota(M) = M^{-1}$ et $H = (h_{ij})$.

1. Montrer que $(I_n + H)^{-1} = I_n - H + H^2 + o(|H|^2)$. En déduire $d^2\iota(I_n)(H, H)$, puis $d^2\iota(I_n)(H, K)$.
2. Retrouver $d^2\iota(I_n)(H, K)$ en dérivant $M \rightarrow -M^{-1}HM^{-1}$.
3. Montrer que $\det(I_n + H) = 1 + \text{tr}(H) + \frac{1}{2}((\text{tr } H)^2 - \text{tr}(H^2)) + o(|H|^2)$.
4. Vérifier que, pour $n = 2$, cette formule est exacte sans le terme $o(|H|^2)$.
5. Soit H antisymétrique. Montrer que $\det(I_n + H) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij}^2 + o(|H|^2)$.

Exercice 18 : Convexité par la hessienne

Soit $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ sur U .

1. Calculer la hessienne de f en tout point de U .
2. Montrer que $d^2 f(x, y)((h, k), (h, k)) = \frac{2}{y} \left(h - \frac{x}{y} k \right)^2$. En déduire que f est convexe sur U .
3. La fonction f est-elle strictement convexe ?
4. Écrire l'inégalité du plan tangent en $(1, 1)$ et retrouver l'inégalité obtenue par un calcul direct.
5. Montrer que $\{(x, y) \in U : x^2 \leq y\}$ est convexe.

Exercice 19 : Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

1. Calculer $\nabla J(x)$ et la hessienne de J .
2. Montrer que J est convexe et qu'elle atteint son minimum en un unique point x^* , que l'on déterminera. Calculer $J(x^*)$.
3. Montrer que $J(x^* + h) = J(x^*) + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$ pour tout h .
4. Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = (1, 1)$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ de rang n et $y \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $x \mapsto |Mx - y|^2$ admet un unique point de minimum, solution de ${}^t M M x = {}^t M y$.

Exercice 20 : Différentielle de $M \mapsto {}^tMM$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme de Frobenius $|M| = \sqrt{\text{tr}({}^tMM)}$. On note $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques, et $f(M) = {}^tMM$.

1. Montrer que f est différentiable et que $df(M)(H) = {}^tHM + {}^tMH$.
2. Déterminer le noyau et l'image de $df(I_n)$.
3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $df(M)$ est une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n$ et déterminer son noyau.
4. Soit $\Omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}(n)$ dérivable avec $\Omega(0) = I_n$. Montrer que $\Omega'(0) \in \mathcal{A}_n$. Vérifier sur la rotation d'angle t du plan.

Exercice 21 : Fonctions homogènes et relation d'Euler

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une fonction $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré α si $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour tous $t > 0$ et $x \neq 0$. On suppose f différentiable.

1. Montrer que si f est homogène de degré α , alors $df(x)(x) = \alpha f(x)$ pour tout $x \neq 0$ (relation d'Euler).
2. Réciproquement, montrer que la relation d'Euler entraîne l'homogénéité de degré α .
3. On suppose f homogène de degré α et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que ses dérivées partielles sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
4. Vérifier la relation d'Euler pour $f(x) = \|x\|_2^3$.
5. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, homogène de degré 1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, avec $f(0) = 0$, et différentiable en 0. Montrer que f est linéaire. En déduire que $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, prolongée par 0, n'est pas différentiable en $(0, 0)$, bien qu'elle y admette des dérivées selon tout vecteur.

Exercice 22 : Dérivée seconde bornée et descente de gradient

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que la norme subordonnée euclidienne de la hessienne vérifie $\|H_f(x)\| \leq M$ pour tout x .

1. Montrer que $|f(x+h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \frac{M}{2}|h|^2$ pour tous x, h .
2. Montrer que ∇f est M -lipschitzienne.
3. Pour $t > 0$, on pose $x_+ = x - t \nabla f(x)$. Montrer que $f(x_+) \leq f(x) - t(1 - \frac{Mt}{2})|\nabla f(x)|^2$.
4. On définit $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{M} \nabla f(x_k)$. On suppose f minorée par m . Montrer que $\sum_k |\nabla f(x_k)|^2 \leq 2M(f(x_0) - m)$ et que $\nabla f(x_k) \rightarrow 0$.
5. Application : $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2)$, pas $t = \frac{1}{5}$ et $x_0 = (2,1)$. Calculer les itérés et vérifier l'inégalité de la question 3 pour le premier pas.

Exercice 23 : Problème, une équation intégrale non linéaire

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$; on admet que E est complet. Pour $u \in E$, on pose

$$G(u)(t) = \int_0^t u(s)^2 ds.$$

1. Montrer que G envoie E dans E , qu'elle est différentiable, et que

$$dG(u)(h)(t) = 2 \int_0^t u(s)h(s) ds. \text{ Majorer } \|dG(u)\|.$$

2. Montrer que G est de classe C^1 .
3. Montrer que G est deux fois différentiable et calculer $d^2G(u)(h,k)$. Vérifier que la formule de Taylor à l'ordre 2 est exacte.
4. Soit B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. Montrer que G est 2-lipschitzienne sur B .
5. Soit $f \in E$ avec $|f|_\infty \leq \frac{1}{2}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| \leq \frac{1}{4}$. On pose $T(u) = f + \lambda G(u)$. Montrer que $T(B) \subset B$ et que T est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur B . En déduire que l'équation $u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t u(s)^2 ds$ admet une unique solution dans B .
6. Déterminer explicitement cette solution lorsque f est la constante $\frac{1}{2}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [calcul différentiel, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre précédent : [Réduction de Jordan et décomposition de Dunford](#)
- Chapitre suivant : [Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés](#)

- Le même thème en maths spé : [calcul différentiel, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)