

## Calcul différentiel

### Corrigé de l'exercice 1 : Dérivée selon un vecteur par la définition

1. La fonction  $f$  est polynomiale. En dérivant par rapport à  $x$  à  $y$  fixé, puis par rapport à  $y$  à  $x$  fixé, on obtient  $\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$  et  $\partial_2 f(x, y) = -4xy + 1$ .

2. On a  $a + tv = (1 + 3t, 2 - t)$ , donc

$$\varphi(t) = (1 + 3t)^3 - 2(1 + 3t)(2 - t)^2 + (2 - t).$$

Dérivons chaque terme. D'abord,  $\frac{d}{dt}(1 + 3t)^3 = 9(1 + 3t)^2$ , qui vaut 9 en 0. Ensuite, la dérivée de  $(1 + 3t)(2 - t)^2$  vaut  $3(2 - t)^2 - 2(1 + 3t)(2 - t)$ , soit  $12 - 4 = 8$  en 0. Enfin, la dérivée de  $2 - t$  vaut  $-1$ . Ainsi,  $\varphi'(0) = 9 - 16 - 1$ , d'où  $D_v f(a) = -8$ .

3. Les dérivées partielles de  $f$  sont polynomiales, donc continues sur  $\mathbb{R}^2$ . Par conséquent,  $f$  est de classe  $C^1$ , donc différentiable en  $a$ . Alors

$$D_v f(a) = df(a)(v) = 3 \partial_1 f(a) - \partial_2 f(a). \text{ Or } \partial_1 f(a) = 3 - 8 = -5 \text{ et } \partial_2 f(a) = -8 + 1 = -7. \text{ On retrouve bien } D_v f(a) = -15 + 7 = -8.$$

4. Dans la base canonique, orthonormée,  $\nabla f(a) = (-5, -7)$ , de norme  $\sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour  $|u| = 1$ ,  $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle \leq \sqrt{74}$ , avec égalité si et seulement si  $u$  est colinéaire à  $\nabla f(a)$  et de même sens. Donc

$$u = -\frac{1}{\sqrt{74}} (5, 7) \text{ et le maximum vaut } \sqrt{74}.$$

### Corrigé de l'exercice 2 : Dérivées directionnelles sans continuité

1. Soit  $v = (h, k)$  et  $t \neq 0$ . Si  $k = 0$ , alors  $f(th, 0) = 0$  (même si  $h = 0$ ), donc le taux d'accroissement est nul et  $D_v f(0, 0) = 0$ . Si  $k \neq 0$ , alors

$$\frac{f(th, tk)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 h^2 k}{t^4 h^4 + t^2 k^2} = \frac{h^2 k}{t^2 h^4 + k^2} \left[ t \rightarrow 0 \right] \frac{h^2}{k}.$$

Ainsi,  $D_{(h,k)} f(0, 0) = \frac{h^2}{k}$  si  $k \neq 0$ , et  $0$  si  $k = 0$ .

2. Posons  $L(v) = D_v f(0, 0)$ . On a  $L(1, 0) = 0$  et  $L(0, 1) = 0$ , mais  $L(1, 1) = 1$ . Donc  $L(1, 1) \neq L(1, 0) + L(0, 1)$  :  $L$  n'est pas linéaire. Or, si  $f$  était différentiable en  $(0, 0)$ , on aurait  $L = df(0, 0)$ , linéaire. Par conséquent,  $f$  **n'est pas différentiable en**  $(0, 0)$ .

3. Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x, mx) = \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{m x}{x^2 + m^2}$ . Si  $m \neq 0$ , cette quantité tend vers  $0/m^2 = 0$ . Si  $m = 0$ , elle est nulle. Donc  $f(x, mx) \rightarrow 0$  **le long de toute droite** (et de même sur l'axe vertical, où  $f$  est nulle).

4. Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $f(x, x^2) \rightarrow 1/2 \neq f(0, 0)$  quand  $x \rightarrow 0$ . Donc  $f$  **n'est pas continue en**  $(0, 0)$ , bien que sa restriction à chaque droite passant par l'origine le soit. La figure de l'énoncé le montre : la parabole  $y = x^2$  reste dans la zone où  $f$  vaut  $1/2$ .

**Point de méthode :** pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable, il suffit souvent de trouver une direction où  $D_v f(a)$  n'existe pas, ou de prouver que  $v \rightarrow D_v f(a)$  n'est pas linéaire, ou encore que  $f$  n'est pas continue.

## Corrigé de l'exercice 3 : Matrices jacobiennes et composition

1. Les composantes de  $F$  et  $G$  sont polynomiales. Leurs dérivées partielles existent donc et sont continues :  $F$  et  $G$  sont de classe  $C^1$ . On obtient

$$J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz \\ xy & -1 & 2z \\ 2x & -1 & 2z \end{pmatrix}, \quad J_G(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{1}{u} \end{pmatrix}.$$

2. En  $a = (1, -1, 2)$ , on a  $yz = -2$ ,  $xz = 2$ ,  $xy = -1$ ,  $2x = 2$  et  $2z = 4$ .  
Donc  $dF(a)(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} -2h_1 + 2h_2 - h_3 \\ 2h_1 - h_2 + 4h_3 \end{pmatrix}$ .

3. D'abord,  $G(1, 0) = (1, 1, 0)$ . Ensuite,  $J_F(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  et

$$J_G(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ La règle de la chaîne donne }$$

$$J_{F \circ G}(1, 0) = J_F(1, 1, 0) J_G(1, 0), \text{ d'où } J_{F \circ G}(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Directement,  $F \circ G(u, v) = \begin{pmatrix} (u^2 - v^2)uv, \\ (u+v)^2 - (u-v) + u^2v^2 \end{pmatrix}$ . La première composante vaut  $u^3v - uv^3$  : ses dérivées partielles sont  $3u^2v - v^3$  et  $u^3 - 3uv^2$ , soit 0 et 1 en  $(1, 0)$ . La seconde a pour dérivées  $2(u+v) - 1 + 2uv^2$  et  $2(u+v) + 1 + 2u^2v$ , soit 1 et 3 en  $(1, 0)$ . **On retrouve bien la même matrice.**

## Corrigé de l'exercice 4 : Norme euclidienne et forme quadratique

1. On a vu dans le cours que  $\varphi : x \rightarrow |x|^2$  est différentiable, avec  $d\varphi(a)(h) = 2 \langle a, h \rangle$ . Sur  $E \setminus \{0\}$ ,  $\varphi$  est à valeurs dans  $]0, +\infty[$ , où la racine carrée est dérivable. Par la règle de la chaîne,  $N = \sqrt{\varphi}$  est différentiable en  $a \neq 0$ , et

$$dN(a)(h) = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(a)}} d\varphi(a)(h) = \frac{\langle a, h \rangle}{|a|}.$$

Donc  $\nabla N(a) = \frac{a}{|a|}$ , vecteur unitaire.

2. Soit  $v \neq 0$ . Alors  $t \rightarrow N(tv) = |t| |v|$  n'est pas dérivable en 0 : ses dérivées à droite et à gauche valent  $|v|$  et  $-|v|$ . Donc  $D_v N(0)$  n'existe pas, et  **$N$  n'est pas différentiable en 0.**

3. L'application  $B(x, y) = \langle u(x), y \rangle$  est bilinéaire et  $q(x) = B(x, x)$ . Par la règle de la chaîne appliquée à  $x \rightarrow (x, x)$ , linéaire, puis à  $B$ , on obtient

$$dq(a)(h) = B(h, a) + B(a, h) = \langle u(h), a \rangle + \langle u(a), h \rangle.$$

Or  $\langle u(h), a \rangle = \langle h, u^*(a) \rangle$ . Ainsi,  $dq(a)(h) = \langle (u + u^*)(a), h \rangle$ , d'où

**$\nabla q(a) = (u + u^*)(a)$ , qui vaut  $2u(a)$  si  $u$  est symétrique.**

4. Ici  $u(x, y) = (x + 2y, 3y)$ , donc  $q(x, y) = x(x + 2y) + 3y^2 = x^2 + 2xy + 3y^2$ .

Les dérivées partielles donnent  $\nabla q(x, y) = (2x + 2y, 2x + 6y)$ . Par ailleurs, la matrice de

$$u + u^* \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Son image de}$$

$(x, y)$  est  $(2x + 2y, 2x + 6y)$  : la formule est vérifiée.

## **Corrigé de l'exercice 5 : Une fonction de classe $C^1$ par ses dérivées partielles**

---

1. Sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f$  est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle y est donc de classe  $C^1$ . Écrivons  $f = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$ . Alors

$$\partial_x f = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Le numérateur vaut

$$3x^4 y + 3x^2 y^3 - x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^2 y^3 = x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5. \text{ Donc } \partial_x f(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2. On a  $f(y, x) = \frac{yx(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2} = -f(x, y)$ . Dérivons l'égalité  $f(x, y) = -f(y, x)$  par rapport à  $y$  : on obtient  $\partial_y f(x, y) = -\partial_x f(y, x)$ . Ainsi,
- $$\partial_y f(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3. Pour tout  $t$ ,  $f(t, 0) = 0$  et  $f(0, t) = 0$ . Les taux d'accroissement sont nuls, donc  $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$ .

4. Il reste à prouver la continuité des dérivées partielles en l'origine. On a  $x^4 + 4x^2 y^2 + y^4 \leq 2(x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) = 2(x^2 + y^2)^2$ . Par l'inégalité triangulaire,

$$|\partial_x f(x, y)| \leq \frac{|y|(x^4 + 4x^2 y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|y| \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\rightarrow} 0.$$

De même,  $|\partial_y f(x, y)| \leq 2|x| \rightarrow 0$ . Les deux dérivées partielles sont donc continues en  $(0, 0)$ , et sur  $\mathbb{R}^2$ . D'après le théorème de caractérisation,  **$f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .**

5. Pour  $y \neq 0$ ,  $\partial_x f(0, y) = \frac{y \times (-y^4)}{y^4} = -y$ , et cette formule vaut aussi en  $y = 0$ . De même, pour  $x \neq 0$ ,  $\partial_y f(x, 0) = \frac{x \cdot x^4}{x^4} = x$ . Donc  $\partial_x f(0, y) = -y$  **et**  $\partial_y f(x, 0) = x$ . Ces fonctions sont dérivables, ce qui servira dans l'étude des dérivées secondes.

## Corrigé de l'exercice 6 : Dérivée le long d'un cercle

---

1. La fonction  $f$  est polynomiale, donc  $C^1$ , et  $\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$ . De plus,  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ . La règle de la chaîne donne

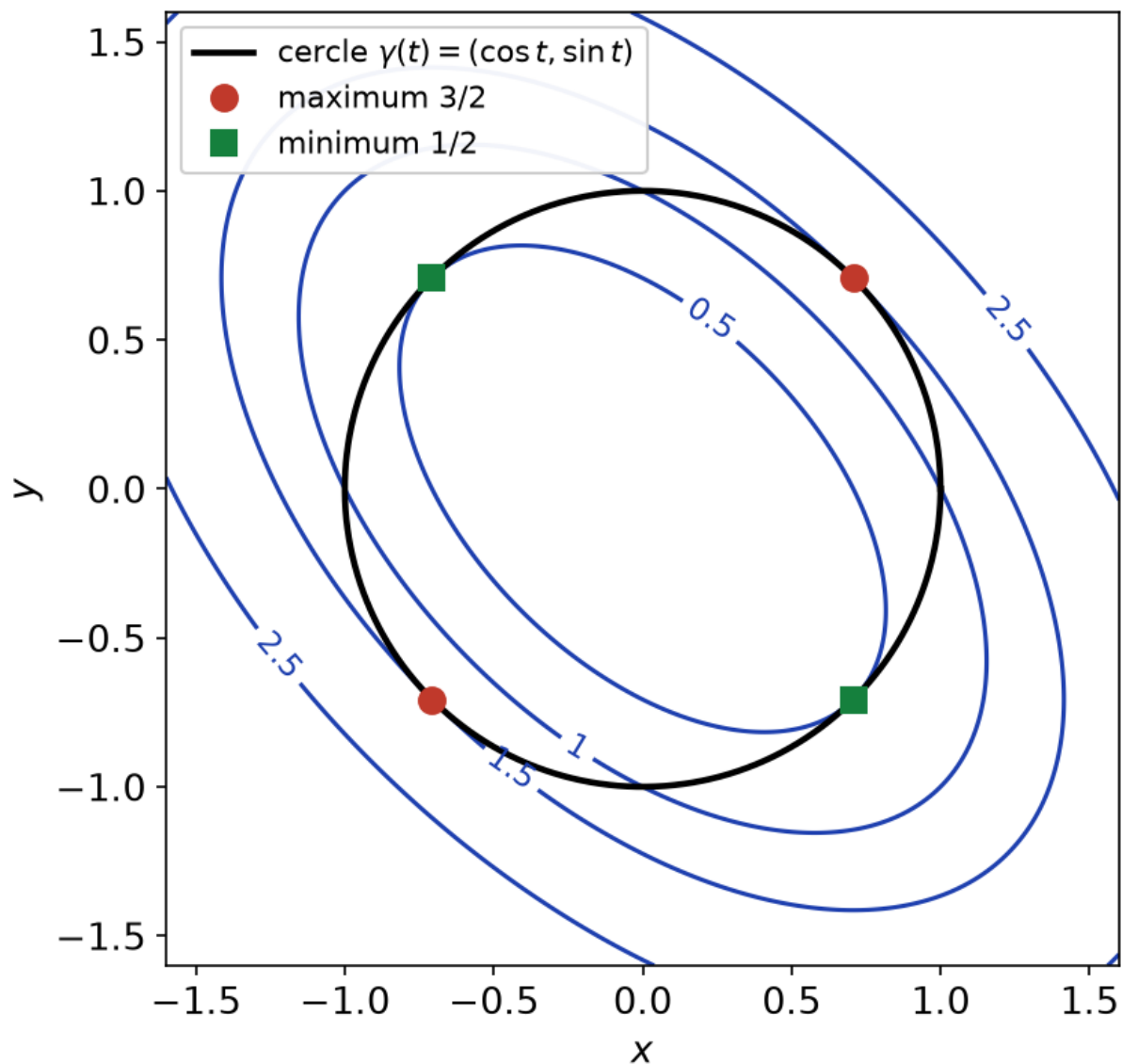
$$(f \circ \gamma)'(t) = -(2\cos t + \sin t) \sin t + (\cos t + 2\sin t) \cos t = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Ainsi,  $(f \circ \gamma)'(t) = \cos(2t)$ .

2. Directement,  $f(\gamma(t)) = \cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t = 1 + \frac{1}{2} \sin(2t)$ . Sa dérivée vaut  $\cos(2t)$  : **le résultat est confirmé.**

3. Comme  $\sin(2t)$  décrit  $[-1, 1]$ ,  $f$  prend sur le cercle toutes les valeurs de  $[1/2, 3/2]$ . Le maximum  $3/2$  est atteint pour  $t = \pi/4$  ou  $5\pi/4$  modulo  $2\pi$ . Le minimum  $1/2$  est atteint pour  $t = 3\pi/4$  ou  $7\pi/4$ . Donc  $\max = \frac{3}{2}$  en  $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  et  $\min = \frac{1}{2}$  en  $\pm \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

4. En  $p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , on a  $\nabla f(p) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 3p$ . **Le gradient est donc colinéaire au vecteur position**, c'est-à-dire normal au cercle. En effet, en un extremum de  $f \circ \gamma$ , la dérivée  $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  est nulle. Autrement dit, la ligne de niveau de  $f$  est tangente au cercle en ce point, comme le montre la figure ci-dessous.



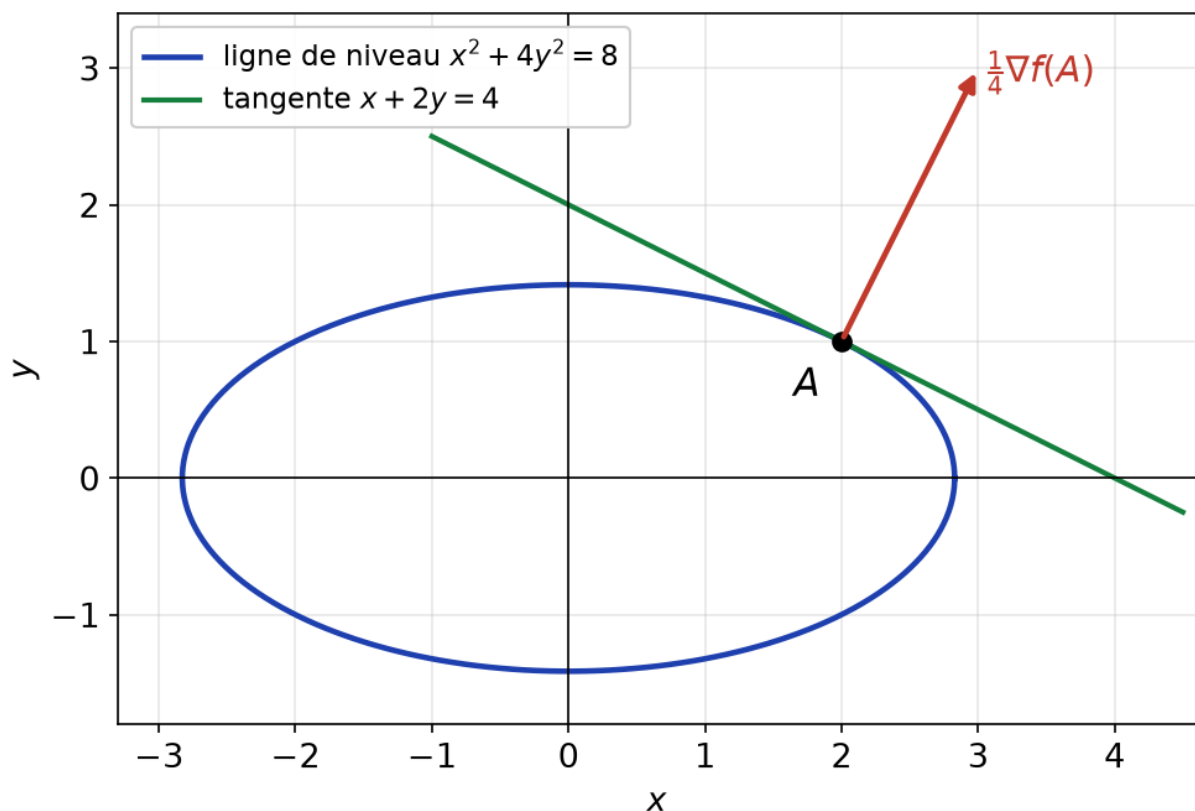
## Corrigé de l'exercice 7 : Gradient et tangente à une ellipse

- On a  $f(2, 1) = 4 + 4 = 8$ , donc  $A \in \mathcal{C}$ . De plus,  $\nabla f(x, y) = (2x, 8y)$ , d'où  $\nabla f(A) = (4, 8)$ .
- Posons  $g = f - 8$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , avec  $\mathcal{C} = \{g = 0\}$ . Comme  $dg(A) = df(A) \neq 0$ , le théorème du cours donne  $T_A \mathcal{C} = \ker dg(A) = \{(h, k) : 4h + 8k = 0\}$ , c'est-à-dire  $T_A \mathcal{C} = \text{Vect}((2, -1))$ . La tangente est la droite  $A + T_A \mathcal{C}$ , d'équation  $4(x - 2) + 8(y - 1) = 0$ . Après simplification, **la tangente a pour équation**  $x + 2y = 4$ .
- On a  $\gamma'(t) = (-2\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t)$  et  $\nabla f(\gamma(t)) = (4\sqrt{2} \cos t, 8\sqrt{2} \sin t)$ . Leur produit

scalaire vaut  $-16 \cos t \sin t + 16 \sin t \cos t = 0$ . **Il est bien nul.** Sans calcul :

$f(\gamma(t)) = 8$  pour tout  $t$ , donc  $(f \circ \gamma)'(t) = 0$ , et cette dérivée vaut  $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  par la règle de la chaîne.

4. La direction de plus forte croissance est celle du gradient, de norme  $\sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$ . Donc  $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$  et  $D_u f(A) = 4\sqrt{5}$ . La figure ci-dessous montre ce gradient, orthogonal à la tangente.



## Corrigé de l'exercice 8 : Plan tangent à un ellipsoïde

- On a  $1 + 2 + 3 = 6$ , donc  $A \in \mathcal{S}$ . Posons  $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$ , de classe  $C^1$ , de gradient  $(2x, 4y, 6z)$ . En  $A$ ,  $\nabla g(A) = (2, 4, 6) \neq 0$ . Le plan tangent a donc pour équation  $2(x - 1) + 4(y - 1) + 6(z - 1) = 0$ , soit  $x + 2y + 3z = 6$ .
- Le gradient  $(2x, 4y, 6z)$  ne s'annule qu'en l'origine. Or  $g(0, 0, 0) = -6 \neq 0$ , donc l'origine n'est pas sur  $\mathcal{S}$ . Ainsi,  $dg$  ne s'annule en aucun point de  $\mathcal{S}$ , et le plan tangent y est partout défini.

3. Le plan tangent en  $M$  est parallèle au plan  $x + y + z = 0$  si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Il faut donc  $2x = 4y = 6z = \mu$  pour un réel  $\mu$ , c'est-à-dire  $(x, y, z) = \left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{6}\right)$ . En reportant dans l'équation de  $S$ ,

$$\mu^2 \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{3}{36} \right) = \frac{11\mu^2}{24} = 6, \text{ donc } \mu^2 = \frac{144}{11}.$$

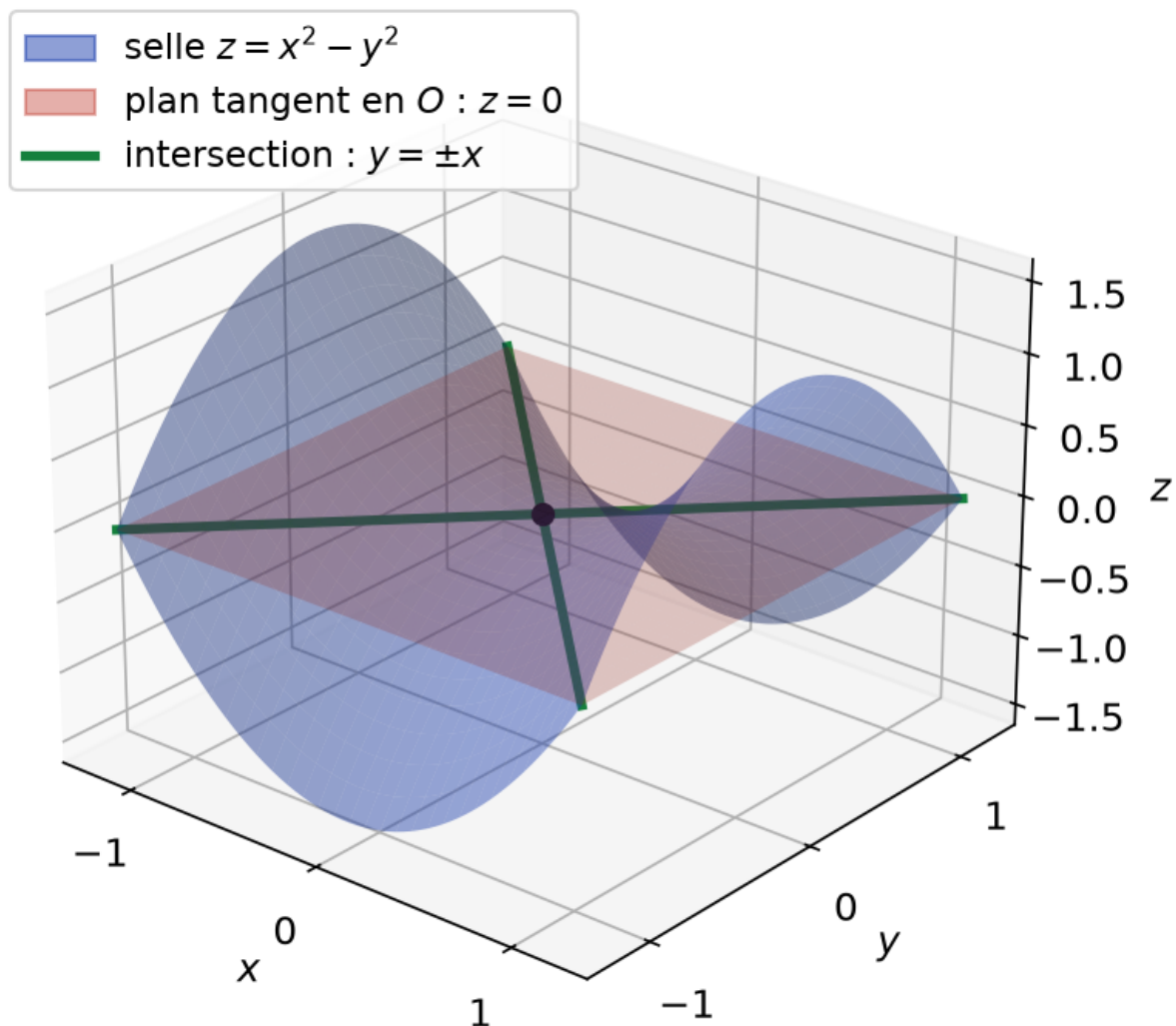
Ainsi,  $\mu = \pm \frac{12}{\sqrt{11}}$ , et **les points cherchés sont**  $\pm \frac{1}{\sqrt{11}}(6, 3, 2)$ . En ces points, le plan tangent a pour équation  $x + y + z = c$ , avec  $c = \pm \frac{6+3+2}{\sqrt{11}}$ . Donc **les plans tangents sont**  $x + y + z = \sqrt{11}$  **et**  $x + y + z = -\sqrt{11}$ .

## Corrigé de l'exercice 9 : Plan tangent à la selle de cheval

---

- Posons  $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$ , polynomiale donc  $C^1$ . Alors  $S = \{g = 0\}$  et  $\nabla g = (2x, -2y, -1)$ . La troisième composante vaut toujours  $-1$ , donc  $dg$  **ne s'annule jamais**, en particulier sur  $S$ .
- Au point  $M = (a, b, a^2 - b^2)$ , le vecteur  $(2a, -2b, -1)$  est normal au plan tangent. L'équation est  $2a(x - a) - 2b(y - b) - (z - a^2 + b^2) = 0$ . En développant,  $P_{a,b}: z = 2ax - 2by - a^2 + b^2$ .
- Pour  $a = b = 0$ , on obtient  $P_{0,0}: z = 0$ . Un point de  $S \cap P_{0,0}$  vérifie  $z = 0$  et  $x^2 - y^2 = 0$ , soit  $(x - y)(x + y) = 0$ . Donc  $S \cap P_{0,0}$  **est la réunion des droites**  $\{y = x, z = 0\}$  **et**  $\{y = -x, z = 0\}$ . Le plan tangent traverse la surface : l'origine n'est ni un maximum ni un minimum de  $x^2 - y^2$ .
- Pour  $a = b = 1$ , on obtient  $P_{1,1}: z = 2x - 2y$ . Un point de  $S$  est dans  $P_{1,1}$  si et seulement si  $x^2 - y^2 = 2x - 2y$ , c'est-à-dire  $(x - y)(x + y - 2) = 0$ . Si  $x = y$ , alors  $z = 0$ . Si  $x + y = 2$ , alors  $z = 2x - 2y$ . Donc  $S \cap P_{1,1}$  **est la réunion des droites**  $\{x = y, z = 0\}$  **et**  $\left\{ \begin{smallmatrix} x \\ y = 2, z = 2x - 2, 2y \end{smallmatrix} \right\}$ , qui se coupent au point de contact  $(1, 1, 0)$ .

La figure ci-dessous représente la selle, son plan tangent horizontal en l'origine et les deux droites d'intersection.



## **Corrigé de l'exercice 10 : Équation de transport et changement de variables linéaire**

1. L'application  $\psi$  est linéaire, de matrice  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , de déterminant  $2 \neq 0$ . Elle est donc bijective. Si  $u = 2x - 3y$  et  $v = y$ , alors  $x = (u + 3v)/2$ . Ainsi,

$$\psi^{-1}(u, v) = \left( \frac{u + 3v}{2}, v \right).$$

2. La fonction  $g = f \circ \psi^{-1}$  est  $C^1$ , comme composée de fonctions  $C^1$ . Par la règle de la chaîne,

$$\partial_v g(u, v) = \frac{3}{2} \partial_x f(x, y) + \partial_y f(x, y) = \frac{1}{2} (3 \partial_x f + 2 \partial_y f)(x, y),$$

où  $(x, y) = \psi^{-1}(u, v)$ . Ainsi,  $\partial_v g = \frac{1}{2}(3 \partial_x f + 2 \partial_y f) \circ \psi^{-1}$ .

3. Comme  $\psi^{-1}$  est une bijection de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  vérifie  $(\mathcal{E})$  si et seulement si  $\partial_v g = 0$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce cas, pour  $u$  fixé,  $v \rightarrow g(u, v)$  a une dérivée nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ . Elle est donc constante, et  $g(u, v) = g(u, 0) = h(u)$ , avec  $h$  de classe  $C^1$ . Réciproquement, toute fonction  $g(u, v) = h(u)$  convient. En revenant à  $f = g \circ \psi$ , **les solutions sont les**  $f(x, y) = h(2x - 3y)$ , avec  $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

4. La condition  $f(x, 0) = h(2x) = \sin x$  impose  $h(u) = \sin(u/2)$ . Donc

$$f(x, y) = \sin\left(x - \frac{3y}{2}\right). \text{ On vérifie : } 3 \cos(\cdot) + 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \cos(\cdot) = 0.$$

Géométriquement, les solutions sont constantes sur les droites  $2x - 3y = c$ , dirigées par  $(3, 2)$ . En effet,  $(\mathcal{E})$  s'écrit  $D_{(3,2)} f = 0$ .

**Point de méthode :** pour une équation  $\alpha \partial_x f + \beta \partial_y f = 0$ , on choisit une nouvelle variable constante le long du vecteur  $(\alpha, \beta)$ , ici  $u = 2x - 3y$ , et une seconde variable qui complète en une base.

## Corrigé de l'exercice 11 : Coordonnées polaires sur un demi-plan

- Pour  $(r, \theta) \in V$ , on a  $r \cos \theta > 0$ , donc  $\Phi(V) \subset U$ . Soit  $(x, y) \in U$  et posons  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ,  $\theta = \arctan(y/x) \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . Alors  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{x}{r}$ , car  $x > 0$ , et  $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{y}{r}$ . Donc  $\Phi(r, \theta) = (x, y)$ . Inversement, si  $\Phi(r, \theta) = (x, y)$ , alors  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\tan \theta = y/x$ , ce qui détermine  $\theta$  dans  $]-\pi/2, \pi/2[$ .  **$\Phi$  est donc bijective de  $V$  sur  $U$** . Enfin,  $\Phi$  et sa réciproque ont des composantes  $C^1$ , obtenues par opérations sur des fonctions usuelles ( $x^2 + y^2 > 0$  et  $x \neq 0$  sur  $U$ ).
- Par la règle de la chaîne, avec  $(x, y) = \Phi(r, \theta)$  :  $\partial_r g = \cos \theta \partial_x f + \sin \theta \partial_y f$  et  $\partial_\theta g = -r \sin \theta \partial_x f + r \cos \theta \partial_y f$ . Ainsi,  $r \partial_r g = (x \partial_x f + y \partial_y f) \circ \Phi$  et  $\partial_\theta g = (x \partial_y f - y \partial_x f) \circ \Phi$ .
- Comme  $\Phi$  est bijective, l'équation équivaut à  $r \partial_r g = r^2$  sur  $V$ , c'est-à-dire  $\partial_r (g - r^2/2) = 0$ . Pour  $\theta$  fixé,  $r \rightarrow g(r, \theta) - r^2/2$  est donc constante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Ainsi,  $g(r, \theta) = r^2/2 + \varphi(\theta)$ , où  $\varphi(\theta) = g(1, \theta) - 1/2$  est  $C^1$ . On revient à  $f = g \circ \Phi^{-1}$  et on pose  $\chi = \varphi \circ \arctan$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On obtient

$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \chi\left(\frac{y}{x}\right)$ . Réciproquement, pour une telle fonction,  $x \partial_x + y \partial_y$  appliqué à  $\chi(y/x)$  donne  $\chi'(y/x) \left(-\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\right) = 0$ , et appliqué à  $(x^2 + y^2)/2$  donne  $x^2 + y^2$ . **Les solutions sont les**  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \chi\left(\frac{y}{x}\right)$ , avec  $\chi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

## Corrigé de l'exercice 12 : Fonctions homogènes et relation d'Euler

- Fixons  $x \in U$ . Pour  $t > 0$ ,  $tx \in U$  et  $f(tx) = t^\alpha f(x)$ . Le membre de gauche est dérivable en  $t$  par la règle de la chaîne, de dérivée  $df(tx)(x) = \sum_i x_i \partial_i f(tx)$ . Celui de droite a pour dérivée  $\alpha t^{\alpha-1} f(x)$ . En  $t = 1$ , on obtient **la relation d'Euler**  

$$\sum_{i=1}^n x_i \partial_i f(x) = \alpha f(x).$$

- La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et

$$\varphi'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} \sum_i x_i \partial_i f(tx) = t^{-\alpha-1} \left( \sum_i (t x_i) \partial_i f(tx) - \alpha f(tx) \right).$$

La relation d'Euler au point  $tx$  montre que la parenthèse est nulle. Ainsi,  $\varphi$  est constante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , et  $\varphi(t) = \varphi(1) = f(x)$ . Donc  $f(tx) = t^\alpha f(x)$  :  **$f$  est homogène de degré  $\alpha$ .**

- On a  $f(tx, ty) = t f(x, y)$  pour  $t > 0$  :  $f$  est homogène de degré 1. Calculons

$$\partial_x f = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 - 2x y^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

et, par symétrie des rôles,  $\partial_y f = \frac{y^4 + 3x^2 y^2 - 2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$ . Alors le numérateur de  $x \partial_x f + y \partial_y f$  vaut  $x^5 + x^3 y^2 + x^2 y^3 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2)$ . **On obtient bien**  $x \partial_x f + y \partial_y f = f$ .

- Soit  $f$  homogène de degré 1 sur  $\mathbb{R}^n$  et différentiable en 0. D'abord,

$$f(0) = f(2 \cdot 0) = 2 f(0), \text{ donc } f(0) = 0. \text{ Ensuite, pour } x \text{ fixé,}$$

$$D_x f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tx)}{t} = f(x). \text{ Or } D_x f(0) = df(0)(x), \text{ donc } f = df(0) \text{ est}$$

**linéaire.** Pour notre exemple prolongé,  $f(1, 0) = 1$ ,  $f(0, 1) = 1$  et  $f(1, 1) = 1 \neq 2$  :  $f$  n'est pas linéaire. Donc **le prolongement n'est pas différentiable en**  $(0, 0)$ . Pourtant, il y est continu, car  $|f(x, y)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ .

## Corrigé de l'exercice 13 : Différentielle du déterminant

1. Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix}$ , on a

$$\det(A + H) = \det A + (a h_4 + d h_1 - b h_3 - c h_2) + (h_1 h_4 - h_2 h_3).$$

Le dernier terme est un  $O(|H|^2) = o(H)$ . Donc

$$d(\det)(A)(H) = d h_1 - c h_2 - b h_3 + a h_4. \text{ Par ailleurs,}$$

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ et la trace de } \text{com}(A)^T H \text{ vaut}$$

$$\sum_{i,j} \text{com}(A)_{ij} H_{ij} = d h_1 - c h_2 - b h_3 + a h_4. \text{ Les deux expressions coïncident.}$$

2. L'application  $(C_1, \dots, C_n) \rightarrow \det(C_1, \dots, C_n)$  est  $n$ -linéaire. D'après le cours, elle est différentiable, et sa différentielle en  $(C_1, \dots, C_n)$  appliquée à  $(H_1, \dots, H_n)$  est la somme annoncée. Comme  $A \rightarrow (C_1, \dots, C_n)$  est linéaire, la règle de la chaîne donne

$$d(\det)(A)(H) = \sum_{j=1}^n \det(C_1, \dots, H_j, \dots, C_n). \text{ Pour } A = I_n, C_i = e_i. \text{ En}$$

développant  $\det(e_1, \dots, H_j, \dots, e_n)$  selon les lignes  $i \neq j$ , on trouve le coefficient  $H_{jj}$ .

$$\text{Donc } d(\det)(I_n)(H) = \sum_j H_{jj} = \text{tr } H.$$

3. On a  $\det(A + H) = \det(A) \det(I_n + A^{-1} H)$ . Or

$$\det(I_n + K) = 1 + \text{tr } K + o(K) \text{ d'après la question 2. Avec } K = A^{-1} H, \text{ on a}$$

$$|K| \leq |A^{-1}| |H|, \text{ donc } o(K) = o(H). \text{ Ainsi,}$$

$$\det(A + H) = \det A + \det(A) \text{tr}(A^{-1} H) + o(H), \text{ d'où}$$

$$d(\det)(A)(H) = \det(A) \text{tr}(A^{-1} H). \text{ On retrouve la formule}$$

$$\text{com}(A)^T = \det(A) A^{-1}.$$

4. L'arc  $E(t) = \exp(tB)$  est dérivable, de dérivée  $B \exp(tB)$ , et il est à valeurs dans  $GL_n(\mathbb{R})$ , d'inverse  $\exp(-tB)$ . Par la règle de la chaîne,

$$\delta'(t) = d(\det)(E(t))(B E(t)) = \det(E(t)) \text{tr}(E(t)^{-1} B E(t)) = \text{tr}(B) \delta(t),$$

car deux matrices semblables ont la même trace. De plus,  $\delta(0) = \det I_n = 1$ . Par unicité de la solution de ce problème de Cauchy linéaire,  $\det(\exp(tB)) = e^{t \text{tr } B}$ .

## Corrigé de l'exercice 14 : Différentielle de l'inversion matricielle

---

1. L'ensemble  $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$  est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue : **il est ouvert**. Ensuite,  $\varphi(A) = \frac{1}{\det A} \operatorname{com}(A)^T$ . Chaque coefficient de  $\varphi(A)$  est un quotient de polynômes en les coefficients de  $A$ , à dénominateur  $\det A \neq 0$ . Ses dérivées partielles existent et sont continues, donc  $\varphi$  est de classe  $C^1$ .
2. L'application  $A \rightarrow A \varphi(A)$  est la composée de  $A \rightarrow (A, \varphi(A))$  et du produit, bilinéaire. Sa différentielle en  $A$  est donc  $H \rightarrow H \varphi(A) + A d\varphi(A)(H)$ . Or  $A \varphi(A) = I_n$  est constante, de différentielle nulle. Ainsi,  $A d\varphi(A)(H) = -H A^{-1}$ . En multipliant à gauche par  $A^{-1}$ ,  $d\varphi(A)(H) = -A^{-1} H A^{-1}$ .
3. Posons  $B = A + H$ , inversible. D'abord,  
$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B) A^{-1} = -B^{-1} H A^{-1}.$$
 Ensuite,  
$$B^{-1} - A^{-1} + A^{-1} H A^{-1} = (A^{-1} - B^{-1}) H A^{-1} = B^{-1} H A^{-1} H A^{-1},$$
en réutilisant l'égalité précédente. **L'identité est démontrée**. Comme  $\varphi$  est continue,  $B^{-1} \rightarrow A^{-1}$  quand  $H \rightarrow 0$ . Donc  $|B^{-1}| \leq 2|A^{-1}|$  pour  $H$  assez petit, et le reste est majoré par  $2|A^{-1}|^3 |H|^2 = o(H)$ . **On retrouve**  $d\varphi(A)(H) = -A^{-1} H A^{-1}$ .
4. Le produit étant bilinéaire,  $(A + H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ , et  $|H^2| \leq |H|^2$ . Donc  $d(A \rightarrow A^2)(A)(H) = AH + HA$ , qui diffère de  $2AH$  si  $A$  et  $H$  ne commutent pas. Ensuite,  $A^{-2} = \varphi(A)^2$ . La règle de la chaîne et la règle du produit donnent  $d\varphi(A)(H) \varphi(A) + \varphi(A) d\varphi(A)(H)$ . Ainsi,  
$$d(A \rightarrow A^{-2})(A)(H) = -A^{-1} H A^{-2} - A^{-2} H A^{-1}.$$
5. Par la règle de la chaîne,  $(M^{-1})'(t) = -M(t)^{-1} M'(t) M(t)^{-1}$ . Pour l'exemple,  
$$M(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ de dérivée } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 Par ailleurs,  
$$M'(t) = N, \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 On calcule  $M^{-1} N = N$ , puis  $N M^{-1} = N$ . Donc  $-M^{-1} N M^{-1} = -N$ . **Les deux calculs donnent**  
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Corrigé de l'exercice 15 : Produit vectoriel et loi des aires

---

1. Le produit vectoriel est bilinéaire sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , de dimension finie. D'après le cours,  **$B$  est différentiable et**  $dB(a, b)(h, k) = h \wedge b + a \wedge k$ .

2. L'arc  $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$  est dérivable, de dérivée  $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ . Par la règle de la chaîne,

$$(\gamma \wedge \gamma')'(t) = \gamma'(t) \wedge \gamma'(t) + \gamma(t) \wedge \gamma''(t).$$

Or  $\gamma' \wedge \gamma' = 0$ . Donc  $(\gamma \wedge \gamma')' = \gamma \wedge \gamma''$ .

3. Si  $\gamma''(t)$  est colinéaire à  $\gamma(t)$ , alors  $\gamma(t) \wedge \gamma''(t) = 0$ . La dérivée de  $L$  est donc nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , et  **$L$  est constant**. Ensuite,

$\langle \gamma(t), L \rangle = \langle \gamma(t), \gamma(t) \wedge \gamma'(t) \rangle = \det(\gamma(t), \gamma(t), \gamma'(t)) = 0$ . Ainsi, si  $L \neq 0$ , **la trajectoire est contenue dans le plan vectoriel  $L^\perp$** .

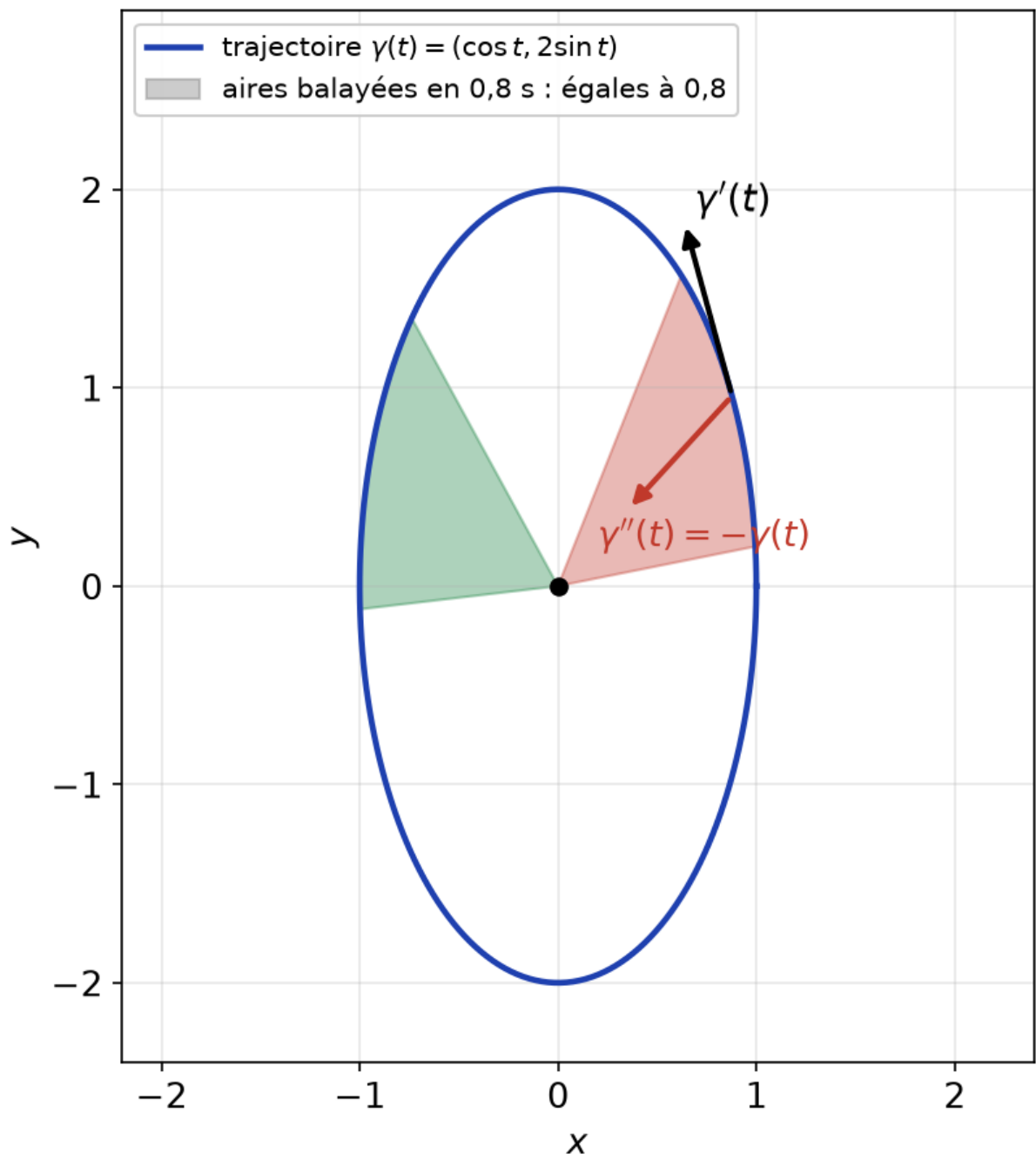
4. On a  $\gamma'(t) = (-\sin t, 2\cos t, 0)$  et  $\gamma''(t) = (-\cos t, -2\sin t, 0) = -\gamma(t)$  :

l'hypothèse est vérifiée. Puis  $L = \gamma \wedge \gamma'$  a ses deux premières composantes nulles, et sa

troisième vaut  $\cos t \times 2\cos t - 2\sin t \times (-\sin t) = 2$ . Donc  $L = (0, 0, 2)$ , et la

trajectoire est dans le plan  $z = 0$ . L'aire balayée entre  $t_1$  et  $t_2$  vaut  $\frac{1}{2} \times 2 \times (t_2 - t_1)$ ,

soit  $t_2 - t_1$  : des durées égales balaient des aires égales. La figure ci-dessous le montre sur deux intervalles de durée 0,8.



## Corrigé de l'exercice 16 : Inégalité des accroissements finis

1. La fonction  $f$  est un produit de fonctions  $C^1$ , donc elle est  $C^1$ . On a

$\nabla f(x, y) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y)$ . Ainsi,

$$|\nabla f(x, y)|^2 = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

car  $\cos^2 y \leq 1$  et  $\sin^2 y \leq 1$ . Donc  $|\nabla f(x, y)| \leq 1$ .

2. Le segment  $\gamma(t) = a + t(b - a)$ ,  $t \in [0, 1]$ , est de classe  $C^1$ , de dérivée  $b - a$ .  
D'après le théorème d'intégration le long d'un arc,

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \langle \nabla f(a + t(b - a)), b - a \rangle dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question 1, l'intégrande est majorée en valeur absolue par  $|b - a|$ . Donc  $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ .

3. Prenons  $a = (0, 0)$  et  $b = (t, 0)$  avec  $t > 0$ . Alors  $\frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} = \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0$ . Aucune constante  $k < 1$  ne convient donc : **la constante 1 est optimale.**
4. Il suffit d'appliquer la question 2 à  $a = (x', y')$  et  $b = (x, y)$ , avec la norme euclidienne.  
**On obtient l'inégalité demandée.**

## Corrigé de l'exercice 17 : Dérivée partielle nulle sur un ouvert non convexe

---

1. La demi-droite  $D = \{0\} \times [0, +\infty[$  est fermée, donc  $U = \mathbb{R}^2 \setminus D$  est ouvert. Montrons que tout point  $(x, y)$  de  $U$  se relie à  $\Omega = (0, -1)$ . Si  $x \neq 0$ , le segment vertical de  $(x, y)$  à  $(x, -1)$  évite  $D$ , car son abscisse est non nulle. Ensuite, le segment horizontal de  $(x, -1)$  à  $\Omega$  évite  $D$ , car son ordonnée est négative. Si  $x = 0$ , alors  $y < 0$  et le segment de  $(0, y)$  à  $\Omega$  est inclus dans  $\{0\} \times ]-\infty, 0[ \subset U$ . **Ainsi,  $U$  est connexe par arcs.**
2. D'après le théorème du cours, sur un ouvert connexe par arcs,  **$f$  est constante.**
3. Étudions  $f$  au voisinage de chaque point  $p = (x_0, y_0)$  de  $U$ . Si  $x_0 < 0$ , ou si  $x_0 = 0$  (alors  $y_0 < 0$ ), ou si  $y_0 < 0$ , alors  $f$  est nulle au voisinage de  $p$ . Si  $x_0 > 0$ , alors au voisinage de  $p$ ,  $f(x, y) = \max(y, 0)^2$ . Or  $y \rightarrow \max(y, 0)^2$  est de classe  $C^1$ , de dérivée  $2\max(y, 0)$ . Dans tous les cas, les dérivées partielles existent et sont continues au voisinage de  $p$ , avec  $\partial_x f = 0$ . **Donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et  $\partial_x f = 0$ .** Pourtant,  $f(1, 1) = 1$  et  $f(-1, 1) = 0$  :  **$f$  ne dépend pas que de  $y$ .**
4. Fixons  $y$  et notons  $I_y = \{x : (x, y) \in W\}$ , qui est un intervalle. La fonction  $x \rightarrow g(x, y)$  est dérivable sur  $I_y$ , de dérivée  $\partial_x g(x, y) = 0$ . Elle est donc constante sur cet intervalle :  $g(x, y) = k(y)$ . **Ainsi,  $g$  ne dépend que de  $y$ .** Pour  $U$ , la section

$\{x : (x, 1) \in U\} = \mathbb{R}^*$  n'est pas un intervalle : c'est pourquoi le contre-exemple de la question 3 est possible.

**Point de méthode :** la connexité par arcs suffit pour conclure quand toute la différentielle est nulle. En revanche, pour une seule dérivée partielle nulle, il faut des sections convexes dans la direction correspondante.

## Corrigé de l'exercice 18 : Espaces tangents à la sphère et aux groupes de matrices

---

1. Soit  $v \in T_x S$  et  $\gamma$  un arc associé. Pour  $t$  voisin de 0,  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$ . Le produit scalaire est bilinéaire, donc on peut dériver en 0 :  $2 \langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $\langle v, x \rangle = 0$ . Réciproquement, soit  $v \in x^\perp$ . Si  $v = 0$ , l'arc constant convient. Sinon, posons  $\gamma(t) = \cos(t|v|) x + \sin(t|v|) \frac{v}{|v|}$ . Par le théorème de Pythagore,  $|\gamma(t)|^2 = \cos^2 + \sin^2 = 1$ . De plus,  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ . Donc  $T_x S = x^\perp$ .
2. Posons  $g(x) = |x|^2 - 1$ , de classe  $C^1$ , avec  $dg(x)(h) = 2 \langle x, h \rangle$ . Pour  $x \in S$ ,  $dg(x)(x) = 2 \neq 0$ . Le théorème donne  $T_x S = \ker dg(x) = x^\perp$ .
3. Soit  $A \in T_{I_n} O_n(\mathbb{R})$  et  $\gamma$  un arc associé. On a  $\gamma(t)^T \gamma(t) = I_n$ . L'application  $M \rightarrow M^T$  est linéaire et le produit est bilinéaire. En dérivant en 0, on obtient  $\gamma'(0)^T \gamma(0) + \gamma(0)^T \gamma'(0) = 0$ , soit  $A^T + A = 0$ . Réciproquement, soit  $A$  antisymétrique et  $\gamma(t) = \exp(tA)$ . Alors  $\gamma(t)^T = \exp(tA^T) = \exp(-tA) = \gamma(t)^{-1}$ , donc  $\gamma(t) \in O_n(\mathbb{R})$ . De plus,  $\gamma'(0) = A$ . **Ainsi,**  $T_{I_n} O_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
4. Posons  $g(M) = \det M - 1$ , de classe  $C^1$ . D'après l'exercice 13,  $dg(I_n)(H) = \text{tr } H$ , forme linéaire non nulle. Le théorème s'applique donc et  $T_{I_n} SL_n(\mathbb{R}) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{tr } H = 0\}$ , hyperplan de dimension  $n^2 - 1$ .

## Corrigé de l'exercice 19 : Espace tangent en un point singulier

---

1. Soit  $v = (h, 0)$ . L'arc  $\gamma(t) = (th, 0)$  est à valeurs dans  $X$ , avec  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma'(0) = v$ . Donc  $v \in T_0 X$ , et de même pour  $(0, k)$ . Ainsi,  $X \subset T_0 X$ .  
Réciproquement, soit  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  à valeurs dans  $X$ , dérivable en  $0$ , avec  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma'(0) = (h, k)$ . Alors  $\gamma_1(t) \gamma_2(t) = 0$ , et  $\frac{\gamma_1(t)}{t} \cdot \frac{\gamma_2(t)}{t} = 0$  pour  $t \neq 0$ . En passant à la limite,  $hk = 0$ , donc  $(h, k) \in X$ . **Ainsi,  $T_0 X = X$ , qui n'est pas un sous-espace vectoriel :  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin X$ .**
2. On a  $dg(x, y)(h, k) = yh + xk$ , donc  $dg(0, 0) = 0$ . L'hypothèse  $dg(x) \neq 0$  du théorème n'est pas satisfaite : l'origine est un point singulier de  $X$ .
3. Par la définition :  $X$  coïncide avec l'axe  $\mathbb{R} \times \{0\}$  sur la boule de centre  $(1, 0)$  et de rayon  $1/2$ . Un arc dans  $X$  passant par  $(1, 0)$  reste, pour  $t$  petit, dans cette boule par continuité. Il est donc de la forme  $(\gamma_1(t), 0)$ , de vecteur dérivé  $(\gamma_1'(0), 0)$ . Inversement,  $\gamma(t) = (1 + th, 0)$  convient pour tout  $h$ . Donc  $T_{(1,0)} X = \mathbb{R} \times \{0\}$ . Par le théorème :  $dg(1, 0)(h, k) = k$  est non nulle, et  $T_{(1,0)} X = \ker dg(1, 0) = \mathbb{R} \times \{0\}$ .
4. Soit  $\gamma(t) = (a(t), |a(t)|)$  un arc à valeurs dans  $Y$ , dérivable en  $0$ , avec  $a(0) = 0$ . La fonction  $b = |a|$  est dérivable en  $0$ , avec  $b(0) = 0$  et  $b \geq 0$ . Donc  $b(t)/t \geq 0$  pour  $t > 0$  et  $b(t)/t \leq 0$  pour  $t < 0$ . En passant à la limite,  $b'(0) = 0$ . Ensuite,  $|a(t)/t| = b(t)/|t| \rightarrow 0$ , donc  $a'(0) = 0$ . **Ainsi,  $T_{(0,0)} Y = \{(0, 0)\}$  : le coin de  $Y$  interdit toute direction non nulle.**

## Corrigé de l'exercice 20 : Problème : différentiabilité des normes usuelles

---

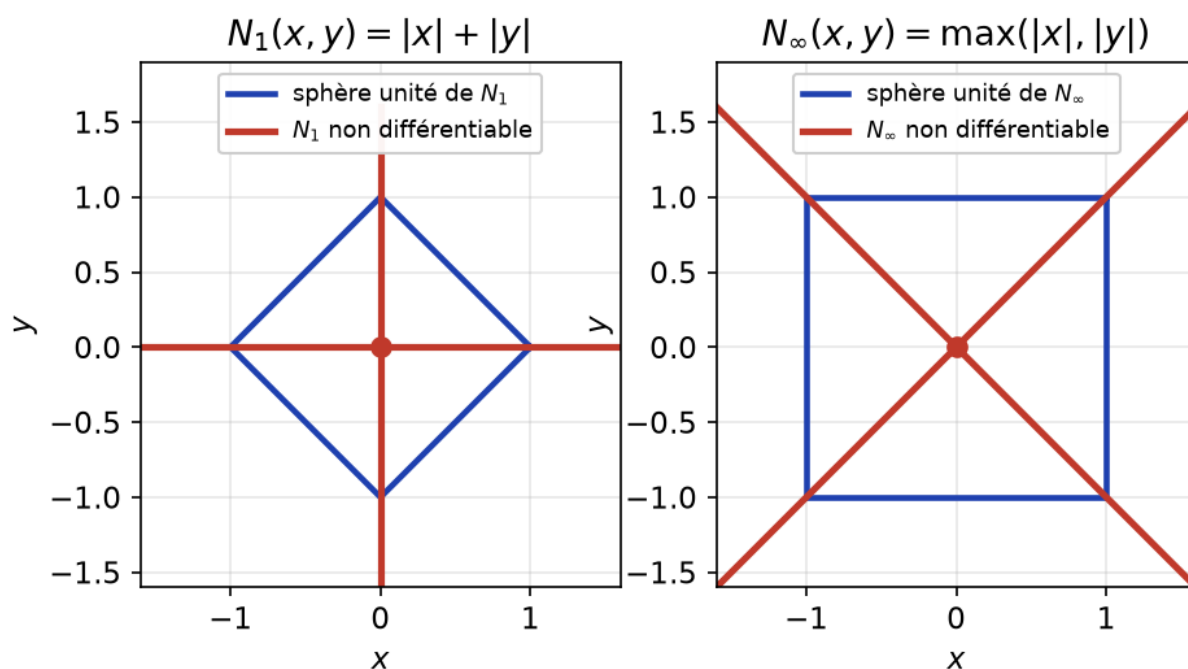
1. Soit  $v \neq 0$ . Pour tout réel  $t$ ,  $N(tv) = |t| N(v)$ , avec  $N(v) > 0$ . Le taux  $\frac{N(tv) - N(0)}{t}$  vaut  $N(v)$  pour  $t > 0$  et  $-N(v)$  pour  $t < 0$ . Il n'a donc pas de limite en  $0$ , et  $D_v N(0)$  n'existe pas. **Aucune norme n'est différentiable en  $0$ .**
2. Supposons  $ab \neq 0$  et notons  $\varepsilon_1 = \text{sgn}(a)$ ,  $\varepsilon_2 = \text{sgn}(b)$ . Sur la boule de centre  $(a, b)$  et de rayon  $\min(|a|, |b|)$  pour  $N_\infty$ ,  $x$  et  $y$  gardent les signes de  $a$  et  $b$ . Donc  $N_1(x, y) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y$  est linéaire, et  $N_1$  est différentiable en  $(a, b)$ , avec  $\nabla N_1(a, b) = (\text{sgn } a, \text{sgn } b)$ . Supposons maintenant  $a = 0$ , avec  $b$  quelconque. Alors

$t \rightarrow N_1(t, b) = |t| + |b|$  n'est pas dérivable en  $0$ , donc  $\partial_x N_1(0, b)$  n'existe pas. De même si  $b = 0$ . Ainsi,  $N_1$  est différentiable en  $(a, b)$  si et seulement si  $ab \neq 0$ .

3. Supposons  $|a| > |b|$ . Par continuité,  $|x| > |y|$  et  $x$  a le signe de  $a$  au voisinage de  $(a, b)$ . Donc  $N_\infty(x, y) = \operatorname{sgn}(a) x$  est linéaire, et  $dN_\infty(a, b)(h, k) = \operatorname{sgn}(a) h$ . De même, si  $|b| > |a|$ ,  $dN_\infty(a, b)(h, k) = \operatorname{sgn}(b) k$ . Supposons enfin  $|a| = |b| = c$ . Si  $c = 0$ , la question 1 conclut. Si  $c > 0$ , posons  $v = (\operatorname{sgn} a, 0)$ . Pour  $|t| < c$ ,  $|a + t \operatorname{sgn} a| = c + t$ , donc  $N_\infty((a, b) + tv) = \max(c + t, c)$ . Cette quantité vaut  $c + t$  pour  $t > 0$  et  $c$  pour  $t < 0$  : les dérivées à droite et à gauche valent  $1$  et  $0$ . Donc  $N_\infty$  n'est pas différentiable quand  $|a| = |b|$ .

4. D'après l'exercice 4,  $N_2$  est différentiable exactement sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Géométriquement,  $N_1$  n'est pas différentiable sur les deux axes,  $N_\infty$  sur les deux diagonales  $y = \pm x$ , et  $N_2$  seulement en l'origine. Ces droites passent par les « coins » des sphères unités, comme le montre la figure ci-dessous.

5. Si  $ab \neq 0$ , alors  $dN_1(a, b)(a, b) = \operatorname{sgn}(a) a + \operatorname{sgn}(b) b = |a| + |b|$ . Donc  $dN_1(p)(p) = N_1(p)$ . Pour une norme  $N$  différentiable en  $p \neq 0$ , on a  $N((1+s)p) = (1+s)N(p)$  pour  $|s| < 1$ . Ainsi,  $\frac{N(p+sp) - N(p)}{s} = N(p)$ , et en faisant tendre  $s$  vers  $0$  on obtient  $dN(p)(p) = D_p N(p) = N(p)$ . C'est la relation d'Euler de l'exercice 12, en degré  $1$ .



## Corrigé de l'exercice 21 : Problème : fonctions radiales

---

1. Tout  $(x, y) \neq (0, 0)$  s'écrit  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  et  $\theta$  un argument de  $x + iy$ . Donc  $\Phi$  est surjective de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  sur  $U$ . Ensuite,  $\Phi$  est  $C^1$  à valeurs dans  $U$ , donc  $g = f \circ \Phi$  est  $C^1$ . Comme dans l'exercice 11, la règle de la chaîne donne  $\partial_\theta g = (x \partial_y f - y \partial_x f) \circ \Phi$  et  $r \partial_r g = (x \partial_x f + y \partial_y f) \circ \Phi$ .
2. Supposons (i). Alors  $\partial_\theta g = 0$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Pour  $r$  fixé,  $\theta \rightarrow g(r, \theta)$  est donc constante sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $g(r, \theta) = g(r, 0) = f(r, 0)$ . Posons  $h(r) = f(r, 0)$ , de classe  $C^1$  comme composée. Pour  $(x, y) \in U$ , écrivons  $(x, y) = \Phi(r, \theta)$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Alors  $f(x, y) = g(r, \theta) = h(r)$ , ce qui prouve (ii). Réciproquement, si  $f = h \circ N_2$ , la règle de la chaîne et l'exercice 4 donnent  $\partial_x f = h'(r) \frac{x}{r}$  et  $\partial_y f = h'(r) \frac{y}{r}$ . Alors  $y \partial_x f - x \partial_y f = 0$ . **Les deux propriétés sont équivalentes.**
3. Le calcul précédent donne  $\nabla f(x, y) = \frac{h'(r)}{r} (x, y)$  : le gradient est radial. Les lignes de niveau  $\{f = c\}$  sont des réunions de cercles centrés en l'origine, puisque  $f$  ne dépend que de  $r$ . **Le gradient, radial, est bien orthogonal à ces cercles.**
4. Pour  $f = h \circ N_2$ , on a  $x \partial_x f + y \partial_y f = r h'(r)$ . L'équation devient  $r h'(r) = r^2 h(r)$ , soit  $h'(r) = r h(r)$  sur  $]0, +\infty[$ . Cette équation différentielle linéaire a pour solutions  $h(r) = C e^{r^2/2}$ . Réciproquement, ces fonctions conviennent. **Les solutions sont les**  $f(x, y) = C \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .
5. Soit  $f$  solution. Alors  $y \partial_x f - x \partial_y f = \frac{yx - xy}{r^3} = 0$ , donc  $f$  est radiale d'après la question 2 :  $f = h \circ N_2$ . La question 3 donne alors  $\frac{h'(r)}{r} = \frac{1}{r^3}$ , soit  $h'(r) = \frac{1}{r^2}$  et  $h(r) = C - \frac{1}{r}$ . Réciproquement,  $\nabla\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{(x, y)}{r}$  convient. **Les solutions sont les**  $f(x, y) = C - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . On pouvait aussi conclure directement :  $U$  est connexe par arcs, donc deux solutions diffèrent d'une constante.

## Corrigé de l'exercice 22 : Problème : un champ qui n'est pas un gradient

---

1. Notons  $\rho = x^2 + y^2$ . On a  $\partial_y P = -\frac{\rho - 2y^2}{\rho^2} = \frac{y^2 - x^2}{\rho^2}$  et  $\partial_x Q = \frac{\rho - 2x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 - x^2}{\rho^2}$ . Donc  $\partial_y P = \partial_x Q$  sur  $U$ .

2. L'arc  $\gamma$  est  $C^1$ , à valeurs dans  $U$ , avec  $\gamma(0) = \gamma(1) = (1, 0)$ . D'après le théorème d'intégration le long d'un arc,

$$0 = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Or  $V(\gamma(t)) = (-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$  et  $\gamma'(t) = 2\pi (-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$ . Leur produit scalaire vaut  $2\pi$ , donc l'intégrale vaut  $2\pi \neq 0$ . **C'est une contradiction :  $V$  n'est le gradient d'aucune fonction  $C^1$  sur  $U$ .**

3. Sur  $H$ ,  $f_0$  est  $C^1$  et

$$\partial_x f_0 = \frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \partial_y f_0 = \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Donc  $\nabla f_0 = V$  sur  $H$ . Si  $f$  est une autre solution, alors  $d(f - f_0) = 0$  sur  $H$ . Or  $H$  est convexe, donc connexe par arcs. Par conséquent, **les solutions sur  $H$  sont les  $f_0 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .**

4. On a  $r \geq |x|$ , avec égalité si et seulement si  $y = 0$ . Donc  $x + r \geq x + |x| \geq 0$ . De plus,  $x + r = 0$  impose  $y = 0$  et  $x \leq 0$ , c'est-à-dire un point retiré. **Ainsi,  $x + r > 0$  sur  $U'$** , et  $\theta$  y est de classe  $C^1$ . Posons  $s = \frac{y}{x+r}$ . En utilisant  $r^2 = x^2 + y^2$ , on obtient  $1 + s^2 = \frac{2r(r+x)}{(x+r)^2}$ , donc  $\frac{2}{1+s^2} = \frac{x+r}{r}$ . Ensuite, avec  $\partial_x r = x/r$ , on trouve  $\partial_x s = \frac{-y}{r(x+r)}$ . De même,  $\partial_y s = \frac{(x+r) - y^2/r}{(x+r)^2} = \frac{x(x+r)}{r(x+r)^2} = \frac{x}{r(x+r)}$ . En multipliant par  $\frac{x+r}{r}$ , **on obtient  $\partial_x \theta = \frac{-y}{r^2} = P$  et  $\partial_y \theta = \frac{x}{r^2} = Q$**  :  $V$  est un gradient sur  $U'$ .

5. La condition  $\partial_y P = \partial_x Q$  est la même sur  $U$ ,  $H$  et  $U'$ . Pourtant,  **$V$  est un gradient sur  $H$  et sur  $U'$ , mais pas sur  $U$** . La différence tient à la forme du domaine :  $U$  contient un lacet qui entoure l'origine, alors que  $U'$ , fendu le long d'une demi-droite, n'en contient pas. La fonction  $\theta$  est une détermination continue de l'angle polaire, qui ne peut être prolongée continûment à tout  $U$ .

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

## Pour aller plus loin en maths spé

---

- Le cours : [calcul différentiel, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur calcul différentiel](#)
- À maîtriser avant : [Compacité, connexité par arcs et dimension finie](#), [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#)
- Chapitre précédent : [Exponentielle de matrice et systèmes différentiels](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions de classe  \$C^k\$  et optimisation](#)
- Le même thème en L3 : [calcul différentiel, exercices de maths en L3](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)