

Calcul différentiel

Corrigé de l'exercice 1 : Différentielle d'une forme quadratique

1. L'application B est linéaire en x et en y . De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|B(x,y)| \leq |Ax| |y| \leq |A| |x| |y|$: elle est donc bilinéaire continue. Or $q(x) = B(x,x)$ est la composée de $x \rightarrow (x,x)$, linéaire, et de B . Par la règle de la chaîne et la différentielle d'une application bilinéaire,

$$dq(x)(h) = B(x,h) + B(h,x) = \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle.$$

Enfin, $\langle Ah, x \rangle = \langle h, {}^tAx \rangle$. Ainsi $dq(x)(h) = \langle (A + {}^tA)x, h \rangle$.

2. Par définition du gradient, $\nabla q(x) = (A + {}^tA)x$, soit $2Ax$ lorsque A est symétrique.

3. D'une part, $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, donc $(A + {}^tA)(1,-1) = (0,-4)$. D'autre part, $q(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ a pour dérivées partielles $2x+2y$ et $2x+6y$. En $(1,-1)$, on retrouve $(0,-4)$. Donc $\nabla q(1,-1) = (0,-4)$.

4. La fonction $t \rightarrow \langle u(t), v(t) \rangle$ est la composée de $t \rightarrow (u(t), v(t))$ et du produit scalaire, bilinéaire. Par conséquent sa dérivée vaut $\langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$. Si $|u(t)|^2 = \langle u(t), u(t) \rangle$ est constante, sa dérivée $2\langle u'(t), u(t) \rangle$ est nulle. Donc $u'(t) \perp u(t)$ pour tout t .

Corrigé de l'exercice 2 : Matrice jacobienne d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

1. Chaque composante est obtenue par produits et composées de fonctions polynomiales, de l'exponentielle et du sinus. Ses dérivées partielles existent donc et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème du cours, **f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.**
2. On dérive chaque composante par rapport à x , puis à y :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix}.$$

3. En $(1,1)$, on a $e^0 = 1$ et $\cos(1)$. D'où $J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ \cos 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$. **Donc**

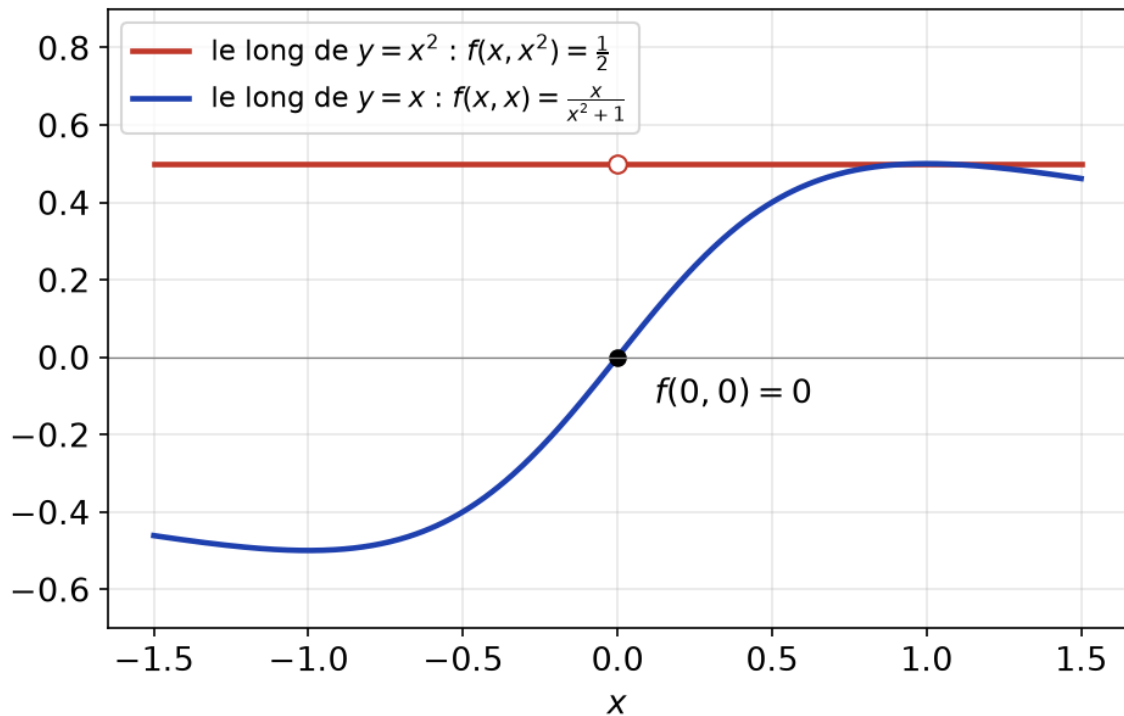
$$df(1,1)(h,k) = (2h+k, \\ h-k, \\ (h+k)\cos 1)$$

4. Posons $\gamma(t) = (t^2, t)$, de sorte que $g = f \circ \gamma$. On a $\gamma(1) = (1,1)$ et $\gamma'(1) = (2,1)$. La règle de la chaîne donne $g'(1) = df(1,1)(2,1) = (5, 1, 3\cos 1)$. Vérifions directement : $g(t) = (t^5, e^{t^2-t}, \sin(t^3))$, donc $g'(t) = (5t^4, (2t-1)e^{t^2-t}, 3t^2\cos(t^3))$. En $t = 1$, $g'(1) = (5, 1, 3\cos 1)$, comme prévu.

Corrigé de l'exercice 3 : Dérivées directionnelles sans continuité

1. On a $(x^2 - |y|)^2 \geq 0$, donc $2x^2|y| \leq x^4 + y^2$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on en déduit $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}$. **Ainsi f est bornée par $\frac{1}{2}$.**
2. Pour $t \neq 0$, $f(ta, tb) = \frac{t^3 a^2 b}{t^4 a^4 + t^2 b^2} = \frac{t a^2 b}{t^2 a^4 + b^2}$. Si $b \neq 0$, alors $\frac{f(ta, tb)}{t} = \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2} \rightarrow \frac{a^2}{b}$. Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $f(ta, 0) = 0$. **Donc $D_v f(0,0) = \frac{a^2}{b}$ si $b \neq 0$, et $D_v f(0,0) = 0$ si $b = 0$.**
3. On trouve $D_{(1,0)} f(0,0) = 0$ et $D_{(0,1)} f(0,0) = 0$. Si l'application était linéaire, elle serait nulle. Or $D_{(1,1)} f(0,0) = 1$. **L'application $v \rightarrow D_v f(0,0)$ n'est pas linéaire.**

4. Pour $x \neq 0$, $f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$. Quand $x \rightarrow 0$, le point (x, x^2) tend vers l'origine alors que f reste égale à $\frac{1}{2} \neq f(0, 0)$. La figure ci-dessous compare deux chemins d'approche : le long de la droite $y = x$, la limite est bien 0 ; le long de la parabole, elle vaut $\frac{1}{2}$. **Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$, a fortiori pas différentiable.** La question 3 donnait déjà la non-différentiabilité.



Point de méthode : pour prouver qu'une fonction n'est pas différentiable, cherchez d'abord une discontinuité le long d'une courbe, puis testez la linéarité de $v \rightarrow D_v f(a)$.

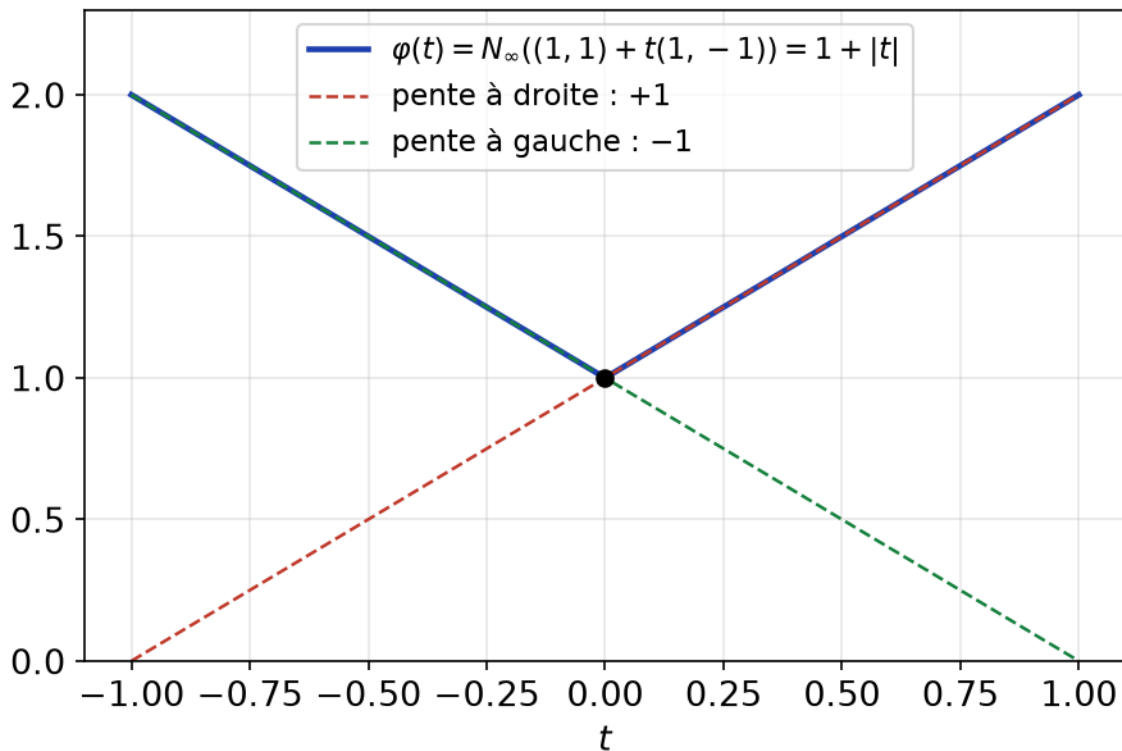
Corrigé de l'exercice 4 : Différentielle de la norme euclidienne

- Posons $q(x) = \langle x, x \rangle$. D'après l'exercice 1 avec $A = I_n$, $dq(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$. Sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, q est à valeurs dans $]0, +\infty[$, où la racine carrée est dérivable de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Par la règle de la chaîne, $N = \sqrt{\cdot} \circ q$ est différentiable et $dN(x)(h) = \frac{2\langle x, h \rangle}{2\sqrt{q(x)}} = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|_2}$.

2. Supposons N différentiable en 0 . Alors, pour $h \neq 0$, $\frac{N(th)-N(0)}{t} = \frac{|t|}{t}|h|_2$ aurait une limite quand $t \rightarrow 0$. Or cette quantité vaut $|h|_2$ pour $t > 0$ et $-|h|_2$ pour $t < 0$. **Donc N n'est pas différentiable en 0 .**
3. Le gradient $\nabla N(x) = \frac{x}{|x|_2}$ est continu sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ comme quotient de fonctions continues. Ainsi N est de classe C^1 sur cet ouvert. Ensuite, Cauchy-Schwarz donne $|dN(x)(h)| \leq |h|_2$, avec égalité pour $h = x$. **Par conséquent $|dN(x)| = 1$ pour tout $x \neq 0$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Différentiabilité de la norme infinie

1. Comme $|x_0| > |y_0| \geq 0$, on a $x_0 \neq 0$. Par continuité, il existe une boule V centrée en (x_0, y_0) sur laquelle $|x| > |y|$ et x a le signe ε de x_0 . Sur V , $N_\infty(x, y) = \varepsilon x$, fonction linéaire. **Donc N_∞ est différentiable en (x_0, y_0) et**
 $dN_\infty(x_0, y_0)(h, k) = \varepsilon h$. Par symétrie, si $|y_0| > |x_0|$, on trouve
 $dN_\infty(x_0, y_0)(h, k) = \text{sgn}(y_0) k$.
2. Pour $|t|$ assez petit, $1+th > 0$ et $1+tk > 0$. Donc
 $N_\infty(1+th, 1+tk) = 1 + \max(th, tk)$. Si $t > 0$, $\max(th, tk) = t\max(h, k)$; si
 $t < 0$, $\max(th, tk) = t\min(h, k)$. **La limite à droite vaut $\max(h, k)$ et la limite à gauche vaut $\min(h, k)$.**
3. Si N_∞ était différentiable en $(1, 1)$, la dérivée selon (h, k) existerait pour tout vecteur. Or, pour $(h, k) = (1, -1)$, les limites à droite et à gauche valent 1 et -1 . La figure ci-dessous montre ce point anguleux : $t \rightarrow N_\infty((1, 1) + t(1, -1)) = 1 + |t|$. **Donc N_∞ n'est pas différentiable en $(1, 1)$.**



4. En $(0,0)$, N_∞ est positivement homogène de degré 1 : comme pour la norme euclidienne, $\frac{N_\infty(tv)}{t} = \frac{|t|}{t} N_\infty(v)$ n'a pas de limite. Soit maintenant (x_0, y_0) avec $|x_0| = |y_0| = a > 0$, et $\varepsilon, \varepsilon'$ les signes de x_0 et y_0 . L'application $S(x, y) = (\varepsilon x, \varepsilon' y)$ est une isométrie linéaire pour N_∞ , et $(x_0, y_0) = a S(1, 1)$. Ainsi $N_\infty((x_0, y_0) + tw) = a N_\infty((1, 1) + \frac{t}{a} S(w))$. La question 3 montre alors l'absence de différentiabilité. **L'ensemble cherché est $\{(x, y) : |x| \neq |y|\}$.**

Corrigé de l'exercice 6 : Puissances et trace sur un espace de matrices

1. Pour $p = 1$, $f_1 = \text{id}$ et $df_1(M)(H) = H$, ce qui correspond à la formule. Supposons le résultat vrai au rang p . On a $f_{p+1}(M) = P(M, f_p(M))$, où $P(X, Y) = XY$ est bilinéaire continue, car $|XY| \leq |X| |Y|$. Par la règle de dérivation d'un produit,

$$df_{p+1}(M)(H) = HM^p + M df_p(M)(H) = HM^p + \sum_{i=0}^{p-1} M^{i+1} H M^{p-1-i}.$$

En posant $j = i+1$, on obtient $df_{p+1}(M)(H) = \sum_{j=0}^p M^j H M^{p-j}$, ce qui achève la récurrence.

- La trace est linéaire, donc $dg_p(M) = \text{tr} \circ df_p(M)$. De plus, $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ donne $\text{tr}(M^i H M^{p-1-i}) = \text{tr}(M^{p-1-i} M^i H) = \text{tr}(M^{p-1} H)$. Les p termes sont égaux. **Donc** $dg_p(M)(H) = p \text{tr}(M^{p-1} H)$.
- On cherche G telle que $\text{tr}({}^t G) = p \text{tr}(M^{p-1} H)$ pour tout H . Il suffit de prendre ${}^t G = p M^{p-1}$. **Ainsi** $\nabla g_p(M) = p {}^t(M^{p-1})$.
- On calcule $MH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $HM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Donc** $df_2(M)(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors que $2MH = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux diffèrent, car M et H ne commutent pas.

Corrigé de l'exercice 7 : Différentielle de l'inversion matricielle

- Le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients, donc continue. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est l'image réciproque d'un ouvert. **C'est donc un ouvert.**
- Comme $|H^k| \leq |H|^k$ et $|H| < 1$, la série $\sum_k (-H)^k$ converge absolument dans l'espace complet $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons S sa somme. Par télescopage, $(I_n + H) \sum_{k=0}^N (-H)^k = I_n - (-H)^{N+1} \rightarrow I_n$. Donc $(I_n + H)S = I_n$, et de même $S(I_n + H) = I_n$. Ensuite, $R(H) = \sum_{k \geq 2} (-H)^k$ vérifie $|R(H)| \leq \sum_{k \geq 2} |H|^k$. **Ainsi** $|R(H)| \leq \frac{|H|^2}{1-|H|}$.
- Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $|H| < \frac{1}{|M^{-1}|}$. Alors $|M^{-1}H| < 1$ et $M + H = M(I_n + M^{-1}H)$ est inversible. De plus, $(M+H)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1} M^{-1} = M^{-1} - M^{-1}H M^{-1} + R(M^{-1}H)M^{-1}$.

Le reste est majoré par $\frac{|M^{-1}|^3 |H|^2}{1 - |M^{-1}| |H|}$, qui est un $o(|H|)$. Enfin, $H \rightarrow -M^{-1}H M^{-1}$

est linéaire, donc continue en dimension finie. **Donc** $d\iota(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

4. On a $d\iota = \Phi \circ \iota$, où $\Phi(A) = (H \rightarrow -AHA)$. Or $AHA - BHB = (A-B)HA + BH(A-B)$, donc $|\Phi(A) - \Phi(B)| \leq |A-B|(|A| + |B|)$. Ainsi Φ est continue. Par ailleurs ι est continue, car différentiable. **Par composition, $d\iota$ est continue : ι est de classe C^1 .**

5. Première méthode : $A(t)^{-1} = \frac{1}{1-t^2} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$, dont la dérivée en 0 vaut $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Seconde méthode : par la règle de la chaîne, la dérivée vaut $d\iota(A(0))(A'(0)) = -A'(0)$, puisque $A(0) = I_2$. **Les deux méthodes donnent** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Différentielle du déterminant

1. Le déterminant est une fonction polynomiale des n^2 coefficients. Ses dérivées partielles sont donc polynomiales, en particulier continues. **Ainsi $\det$ est de classe C^1 .**

2. Par définition, $\det(I_n + tH) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(i)i} + t h_{\sigma(i)i})$. Si $\sigma \neq \text{id}$, au moins deux indices vérifient $\sigma(i) \neq i$; le produit correspondant est alors un $O(t^2)$. Pour $\sigma = \text{id}$, le produit vaut $\prod_i (1 + t h_{ii}) = 1 + t \text{tr}(H) + O(t^2)$. Ainsi la dérivée de $\det$ en I_n selon H vaut $\text{tr}(H)$. Comme $\det$ est différentiable, cette dérivée est $d\det(I_n)(H)$. **Donc $d\det(I_n)(H) = \text{tr}(H)$.**

3. Pour M inversible, $\det(M+H) = \det(M)\det(I_n + M^{-1}H)$. L'application $H \rightarrow M^{-1}H$ est linéaire. Par la règle de la chaîne, $d\det(M)(H) = \det(M) \text{tr}(M^{-1}H)$. Enfin, $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\text{com}(M)$. **D'où $d\det(M)(H) = \text{tr}({}^t\text{com}(M)H)$.**

4. Fixons H . Les applications $M \rightarrow d\det(M)(H)$ et $M \rightarrow \text{tr}({}^t\text{com}(M)H)$ sont continues : la première parce que $\det$ est C^1 , la seconde parce qu'elle est polynomiale. Elles coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$, qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: en effet, $M - \frac{1}{p}I_n$ est inversible pour p assez grand. **Par densité, la formule vaut pour toute matrice M .**

5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$\det(M+H) = (a+h_{11})(d+h_{22}) - (b+h_{12})(c+h_{21})$, dont la partie linéaire en H est $d h_{11} + a h_{22} - c h_{12} - b h_{21}$. Par ailleurs, $\text{tr}(\text{com}(M)) = \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$, et la trace de $\text{com}(M)H$ vaut $d h_{11} - b h_{21} - c h_{12} + a h_{22}$. **Les deux expressions coïncident.**

Corrigé de l'exercice 9 : Dérivées partielles en coordonnées polaires

- On a $F = f \circ \Phi$, avec $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. La jacobienne de Φ vaut $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$. La règle de la chaîne donne donc $\partial_r F = \cos \theta \partial_1 f + \sin \theta \partial_2 f$ et $\partial_\theta F = -r \sin \theta \partial_1 f + r \cos \theta \partial_2 f$.
- Notons $a = \partial_1 f$, $b = \partial_2 f$, $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$. Alors $(\partial_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta F)^2 = (ca + sb)^2 + (-sa + cb)^2$. Les doubles produits $2csab$ et $-2csab$ s'annulent. Il reste $(c^2 + s^2)(a^2 + b^2)$. **Donc l'expression vaut** $a^2 + b^2 = |\nabla f|^2$.
- Pour $f(x, y) = x^2 - y^2$, on a $F(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$. Directement, $\partial_r F = 2r \cos 2\theta$ et $\partial_\theta F = -2r^2 \sin 2\theta$. Avec les formules : $\partial_r F = \cos \theta \cdot 2r \cos \theta + \sin \theta \cdot (-2r \sin \theta) = 2r \cos 2\theta$. De même, $\partial_\theta F = -r \sin \theta \cdot 2r \cos \theta + r \cos \theta \cdot (-2r \sin \theta) = -2r^2 \sin 2\theta$. **Les résultats concordent.**
- En $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a $\partial_\theta F = x \partial_2 f - y \partial_1 f = 0$. Pour $r > 0$ fixé, $\theta \rightarrow F(r, \theta)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$: elle est constante. Donc $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(r, 0)$ pour tout θ . **Ainsi** $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$ **ne dépend que de** $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Corrigé de l'exercice 10 : Fonctionnelles intégrales sur $C([0, 1])$

1. On développe : $\varphi(u+h) - \varphi(u) = 2 \int_0^1 uh + \int_0^1 h^2$. La forme $L_u(h) = 2 \int_0^1 uh$ est linéaire et $|L_u(h)| \leq 2\|u\|_\infty \|h\|_\infty$: elle est continue. Le reste vérifie

$$0 \leq \int_0^1 h^2 \leq \|h\|_\infty^2 = o(\|h\|_\infty). \text{ Donc } d\varphi(u) = L_u. \text{ Ensuite,}$$

$|(L_u - L_v)(h)| \leq 2\|u-v\|_\infty \|h\|_\infty$, soit $|d\varphi(u) - d\varphi(v)| \leq 2\|u-v\|_\infty$. **Ainsi $d\varphi$ est lipschitzienne, et φ est de classe C^1 .**

2. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour le sinus donne

$\sin(a+b) = \sin a + b \cos a - \frac{b^2}{2} \sin c$ pour un certain réel c . Comme $|\sin c| \leq 1$, l'inégalité suit. Appliquons-la avec $a = u(t)$ et $b = h(t)$, puis intégrons :

$$\left| \psi(u+h) - \psi(u) - \int_0^1 \cos(u(t)) h(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 h^2 \leq \frac{\|h\|_\infty^2}{2}.$$

La forme $h \rightarrow \int_0^1 \cos(u) h$ est linéaire, de norme au plus 1. **Donc ψ est différentiable et**

$$d\psi(u)(h) = \int_0^1 \cos(u(t)) h(t) dt.$$

3. Le cosinus est 1-lipschitzien, donc $|\cos u(t) - \cos v(t)| \leq \|u-v\|_\infty$. Par conséquent, $|(d\psi(u) - d\psi(v))(h)| \leq \|u-v\|_\infty \|h\|_\infty$. **Ainsi $|d\psi(u) - d\psi(v)| \leq \|u-v\|_\infty$ et ψ est de classe C^1 .**
4. Comme $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $d\psi(u_0) = 0$: u_0 est un point critique. Ce n'est pas un hasard. En effet, $\psi(u) \leq 1 = \psi(u_0)$ pour tout u , donc u_0 réalise le maximum global de ψ .

5. Supposons φ différentiable en u pour $\|\cdot\|_1$, de différentielle L . Alors $L(h)$ est la dérivée de

φ selon h , qui vaut $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u+th) - \varphi(u)}{t} = 2 \int_0^1 uh$. Le reste vaut donc $\int_0^1 h^2$, et il

devrait être un $o(\|h\|_1)$. Prenons $h_n(t) = \max(0, 1-nt)$. On calcule $\|h_n\|_1 = \frac{1}{2n}$ et

$$\int_0^1 h_n^2 = \frac{1}{3n}. \text{ Le rapport vaut } \frac{2}{3} \text{ et ne tend pas vers } 0, \text{ alors que } \|h_n\|_1 \rightarrow 0. \text{ Donc } \varphi$$

n'est différentiable en aucun point pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Point de méthode : en dimension infinie, la différentiabilité dépend de la norme ; le candidat

différentielle se lit toujours sur les dérivées directionnelles.

Corrigé de l'exercice 11 : Différentiable mais pas de classe C^1

1. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction r est de classe C^1 et strictement positive, avec $\partial_1 r = \frac{x}{r}$. Par composition et produit, g y est de classe C^1 . De plus,

$$\partial_1 g(x, y) = 2x \sin \frac{1}{r} + r^2 \cos \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{x}{r}.$$

Ainsi $\partial_1 g(x, y) = 2x \sin \frac{1}{r} - \frac{x}{r} \cos \frac{1}{r}$.

2. Pour $(h, k) \neq (0, 0)$, on a $|g(h, k)| \leq h^2 + k^2 = |(h, k)|_2^2$, qui est un $o(|(h, k)|_2)$. Autrement dit, $g(h, k) = g(0, 0) + 0 + o(|(h, k)|)$. **Donc g est différentiable en $(0, 0)$ et $dg(0, 0) = 0$.**
3. Pour $x > 0$, $r = x$ et $\partial_1 g(x, 0) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Pour $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, on obtient -1 ; pour $x'_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$, on obtient 1 . Les deux suites tendent vers 0 . **Donc $\partial_1 g(x, 0)$ n'a pas de limite en 0^+ .**
4. D'après les questions 1 et 2, g est différentiable en tout point. Si g était C^1 , alors $\partial_1 g$ serait continue en $(0, 0)$ et tendrait vers $\partial_1 g(0, 0) = 0$. La question 3 l'interdit. **Donc g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ sans être de classe C^1 .**

Corrigé de l'exercice 12 : Une application contractante du plan

1. Notons $c = \cos(x+y)$ et $s = \sin(x-y)$. On a $\partial_x \cos(x-y) = -s$ et $\partial_y \cos(x-y) = s$. **Donc $J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} c & c \\ -s & s \end{pmatrix}$.**
2. On calcule ${}^t J J = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} c^2 + s^2 & c^2 - s^2 \\ c^2 - s^2 & c^2 + s^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice symétrique admet les vecteurs propres

$(1,1)$ et $(1,-1)$, de valeurs propres $\frac{2c^2}{9}$ et $\frac{2s^2}{9}$. Or la norme subordonnée euclidienne de J est la racine de la plus grande valeur propre de ${}^tJJ$. **Donc**

$$|dF(x,y)| = \frac{\sqrt{2}}{3} \max(|c|, |s|) \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. L'ouvert $\mathbb{R}^2$ est convexe et F est de classe C^1 . L'inégalité des accroissements finis donne

$$|F(X) - F(Y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} |X - Y|. \text{ Ainsi } F \text{ est } \frac{\sqrt{2}}{3}\text{-lipschitzienne.}$$

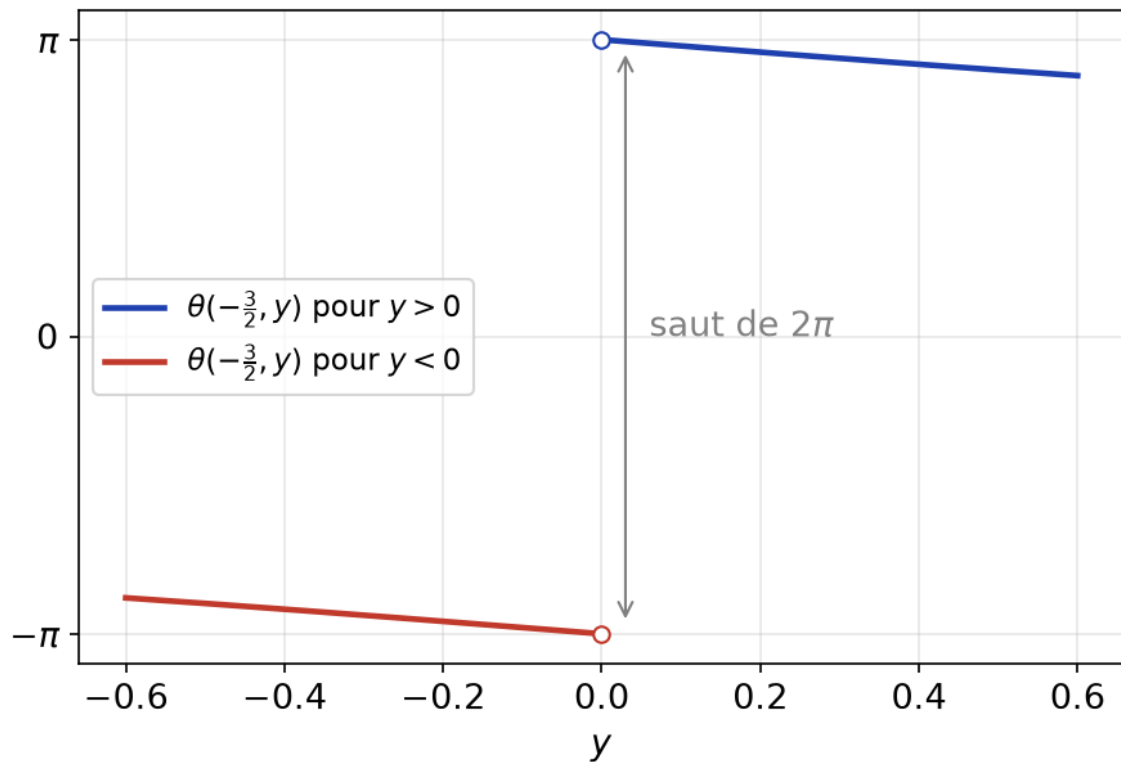
4. Comme $\frac{\sqrt{2}}{3} < 1$, F est contractante sur l'espace complet $\mathbb{R}^2$. Le théorème du point fixe de Picard fournit un unique point fixe, c'est-à-dire une unique solution du système. Enfin, un point fixe vérifie $|x| = \frac{1}{3} |\sin(x+y)| \leq \frac{1}{3}$, et de même pour y . **L'unique solution appartient donc à $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]^2$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Accroissements finis sur un ouvert non convexe

1. La relation $y \cos \theta = x \sin \theta$ découle de $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Dérivons-la par rapport à x : $-y \sin \theta \partial_x \theta = \sin \theta + x \cos \theta \partial_x \theta$. Donc $-(x \cos \theta + y \sin \theta) \partial_x \theta = \sin \theta$. Or $x \cos \theta + y \sin \theta = r$. Ainsi $\partial_x \theta = -\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{y}{r^2}$. Par rapport à y , on obtient de même $\cos \theta = r \partial_y \theta$. **Donc $\nabla \theta = (-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2})$.**

2. La norme de $d\theta(x,y)$ pour la norme euclidienne est celle du gradient, soit $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2} = \frac{1}{r}$.
Comme $r > 1$ sur U , on a $|d\theta| < 1$.

3. Le point A_ε est dans le demi-plan $y > 0$, à gauche. Son argument vaut $\pi - \arctan \frac{2\varepsilon}{3}$. Par symétrie, $\theta(B_\varepsilon) = -\pi + \arctan \frac{2\varepsilon}{3}$. Par conséquent,
 $\theta(A_\varepsilon) - \theta(B_\varepsilon) = 2\pi - 2\arctan \frac{2\varepsilon}{3} \rightarrow 2\pi$. Pourtant, la distance $|A_\varepsilon - B_\varepsilon| = 2\varepsilon$ est inférieure à 1. La figure ci-dessous montre ce saut de 2π de part et d'autre de la coupure. **La fonction θ n'est donc pas 1-lipschitzienne sur U .**



4. L'inégalité des accroissements finis exige que le segment $[A_\epsilon, B_\epsilon]$ soit inclus dans U . Or il traverse la coupure au point $(-\frac{3}{2}, 0)$, qui n'est pas dans U . Il n'y a donc aucune contradiction. En revanche, une boule ouverte incluse dans U est convexe, et $|d\theta| \leq 1$ sur celle-ci. **Par l'inégalité des accroissements finis, θ est 1-lipschitzienne sur toute boule incluse dans U .**

Corrigé de l'exercice 14 : Différentielle nulle et connexité

1. Prenons $U = \{(x, y) : x \neq 0\}$, réunion de deux demi-plans ouverts disjoints. La fonction f égale à 1 si $x > 0$ et à 0 si $x < 0$ est localement constante. **Elle est donc C^1 , de différentielle nulle, mais non constante : l'ouvert U n'est pas connexe.**
2. Soient (x, y) et (x', y) dans U . Par convexité, le segment horizontal qui les joint est inclus dans U . La fonction $g(t) = f(t, y)$ est dérivable sur l'intervalle d'extrémités x et x' , de dérivée $\partial_1 f(t, y) = 0$. Elle y est donc constante. **Ainsi $f(x, y) = f(x', y)$.**

3. Soit $\eta(y) = y^2$ pour $y > 0$ et $\eta(y) = 0$ sinon ; cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $\eta'(0) = 0$. Sur le demi-plan $x > 0$, $f(x,y) = \eta(y)$; sur $x < 0$, $f = 0$. Enfin, un point $(0,y)$ de U vérifie $y < 0$: il possède un voisinage inclus dans $\{y < 0\}$, sur lequel $f = 0$. Donc f est C^1 sur U et $\partial_1 f = 0$. Pourtant, $f(1,1) = 1$ et $f(-1,1) = 0$.

La conclusion de la question 2 tombe en défaut, car U n'est pas convexe.

4. Fixons x et posons $g(t) = f(tx)$. Pour $t \neq 0$,
 $g'(t) = df(tx)(x) = \frac{1}{t} df(tx)(tx) = 0$. Ainsi g est constante sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$. Comme g est continue en 0 , ces deux constantes valent $g(0) = f(0)$. **Donc $f(x) = g(1) = f(0)$: f est constante.**

Corrigé de l'exercice 15 : Formule de Taylor à l'ordre 2 pour un polynôme

1. On a $\partial_1 f = 3x^2 - 3y$ et $\partial_2 f = 3y^2 - 3x$. **Donc** $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ **et**
 $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.
2. Les points critiques vérifient $y = x^2$ et $x = y^2$. Donc $x = x^4$, soit $x = 0$ ou $x = 1$. **Les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.**
3. En $(1,1)$, $f(1,1) = -1$, le gradient est nul et $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. La formule de Taylor-Young s'écrit $f(1+h, 1+k) = -1 + \frac{1}{2}(6h^2 - 6hk + 6k^2) + o(h^2 + k^2)$. Vérifions par un développement exact :

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k) &= (1+h)^3 + (1+k)^3 - 3(1+h)(1+k) \\ &= -1 + 3h^2 + 3k^2 - 3hk + h^3 + k^3. \end{aligned}$$

Ainsi $f(1+h, 1+k) = -1 + 3(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3$: le reste est exactement $h^3 + k^3$.

4. On a $h^2 - hk + k^2 - \frac{1}{2}(h^2 + k^2) = \frac{1}{2}(h-k)^2 \geq 0$. Posons $\rho = \max(|h|, |k|)$. Comme $|h^3| \leq \rho h^2$ et $|k^3| \leq \rho k^2$,

$$f(1+h, 1+k) + 1 \geq \left(\frac{3}{2} - \rho\right)(h^2 + k^2).$$

Pour $0 < \rho < \frac{3}{2}$, ce minorant est strictement positif. **Donc $(1,1)$ est un minimum local strict, de valeur -1 .**

5. On a $f(t,t) = 2t^3 - 3t^2 = t^2(2t-3) < 0$ pour t petit non nul, et $f(t,-t) = 3t^2 > 0$. Dans tout voisinage de l'origine, f prend des valeurs des deux signes, alors que $f(0,0) = 0$. **Donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local.**

Corrigé de l'exercice 16 : Contre-exemple au théorème de Schwarz

1. On écrit $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2) - 2y^2$. Donc $\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = xy - \frac{2xy^3}{x^2 + y^2}$. **C'est l'égalité demandée.**

2. Hors de l'origine, on dérive la forme précédente, avec $r^2 = x^2 + y^2$:

$$\partial_1 f = y - \frac{2y^3(y^2 - x^2)}{r^4}, \quad \partial_2 f = x - \frac{2x(3x^2y^2 + y^4)}{r^4}.$$

En effet, $\partial_x \frac{x}{r^2} = \frac{y^2 - x^2}{r^4}$ et $\partial_y \frac{y^3}{r^2} = \frac{3y^2r^2 - 2y^4}{r^4} = \frac{3x^2y^2 + y^4}{r^4}$. En $(0,0)$, on a $f(x,0) = 0$ et $f(0,y) = 0$. **Donc $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$.**

3. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est C^1 comme fraction rationnelle. À l'origine, $|2y^3(y^2 - x^2)| \leq 2r^3 \cdot r^2$, donc le second terme de $\partial_1 f$ est majoré par $2r$. De même, $3x^2y^2 + y^4 \leq 3r^4$ et le second terme de $\partial_2 f$ est majoré par $6r$. Ainsi $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ tendent vers 0 en l'origine. **Les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe C^1 .**

4. Pour $y \neq 0$, $\partial_1 f(0,y) = y - \frac{2y^5}{y^4} = -y$, formule encore vraie pour $y = 0$. Donc $\partial_2(\partial_1 f)(0,0) = -1$. De même, $\partial_2 f(x,0) = x$, d'où $\partial_1(\partial_2 f)(0,0) = 1$. **Les deux dérivées croisées valent -1 et 1 .**

5. Si f était de classe C^2 , le théorème de Schwarz imposerait l'égalité des dérivées croisées. **Donc f est de classe C^1 mais pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.**

Corrigé de l'exercice 17 : Développement à l'ordre 2 de l'inverse et du déterminant

1. Pour $|H| < 1$, l'exercice 7 donne $(I_n + H)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-H)^k$. Le reste $\sum_{k \geq 3} (-H)^k$ est majoré par $\frac{|H|^3}{1-|H|} = o(|H|^2)$. Donc $(I_n + H)^{-1} = I_n - H + H^2 + o(|H|^2)$.

Ensuite, $d\iota = \Phi \circ \iota$, où $\Phi(A) = (H \rightarrow -AHA)$ est polynomiale, donc différentiable.

Ainsi ι est deux fois différentiable, et Taylor-Young donne

$$\iota(I_n + H) = I_n - H + \frac{1}{2}d^2\iota(I_n)(H, H) + o(|H|^2). \text{ Par différence,}$$

$$Q(H) = \frac{1}{2}d^2\iota(I_n)(H, H) - H^2 \text{ est un } o(|H|^2). \text{ Or } Q(tH) = t^2Q(H); \text{ en faisant}$$

$t \rightarrow 0$, on obtient $Q(H) = 0$. Donc $d^2\iota(I_n)(H, H) = 2H^2$. Enfin, par symétrie (théorème de Schwarz), on polarise : $d^2\iota(I_n)(H, K) = \frac{1}{2}(2(H+K)^2 - 2H^2 - 2K^2)$.

Ainsi $d^2\iota(I_n)(H, K) = HK + KH$.

2. On a $d\iota(M)(H) = -\iota(M)H\iota(M)$. Pour H fixé, c'est la composée de ι et de l'application bilinéaire $(X, Y) \rightarrow -XHY$. Sa dérivée selon K vaut

$$-d\iota(M)(K)H\iota(M) - \iota(M)Hd\iota(M)(K). \text{ En } M = I_n, \text{ avec } d\iota(I_n)(K) = -K, \text{ on retrouve } d^2\iota(I_n)(H, K) = KH + HK.$$

3. Le déterminant $\det(I_n + H) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_i (\delta_{\sigma(i)}i + h_{\sigma(i)i})$ est un polynôme en les h_{ij} .

En dimension finie, chaque $|h_{ij}|$ est majoré par $C|H|$. Ainsi les termes de degré au moins 3 forment un $O(|H|^3)$. Cherchons les termes de degré au plus 2.

D'abord, $\sigma = \text{id}$ donne $\prod_i (1 + h_{ii}) = 1 + \sum_i h_{ii} + \sum_{i < j} h_{ii}h_{jj} + \dots$. Ensuite, une

transposition $\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$, de signature -1 , donne $-h_{ij}h_{ji}$ exactement. Enfin, toute autre

permutation déplace au moins trois indices et ne produit que des termes de degré au moins 3. Le terme de degré 2 vaut donc $\sum_{i < j} (h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji})$.

Or $(\text{tr } H)^2 - \text{tr}(H^2) = \sum_{i,j} h_{ii}h_{jj} - \sum_{i,j} h_{ij}h_{ji}$. Les termes $i = j$ s'éliminent, et les

couples $i \neq j$ apparaissent deux fois. On obtient $2 \sum_{i < j} (h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji})$. **Donc**

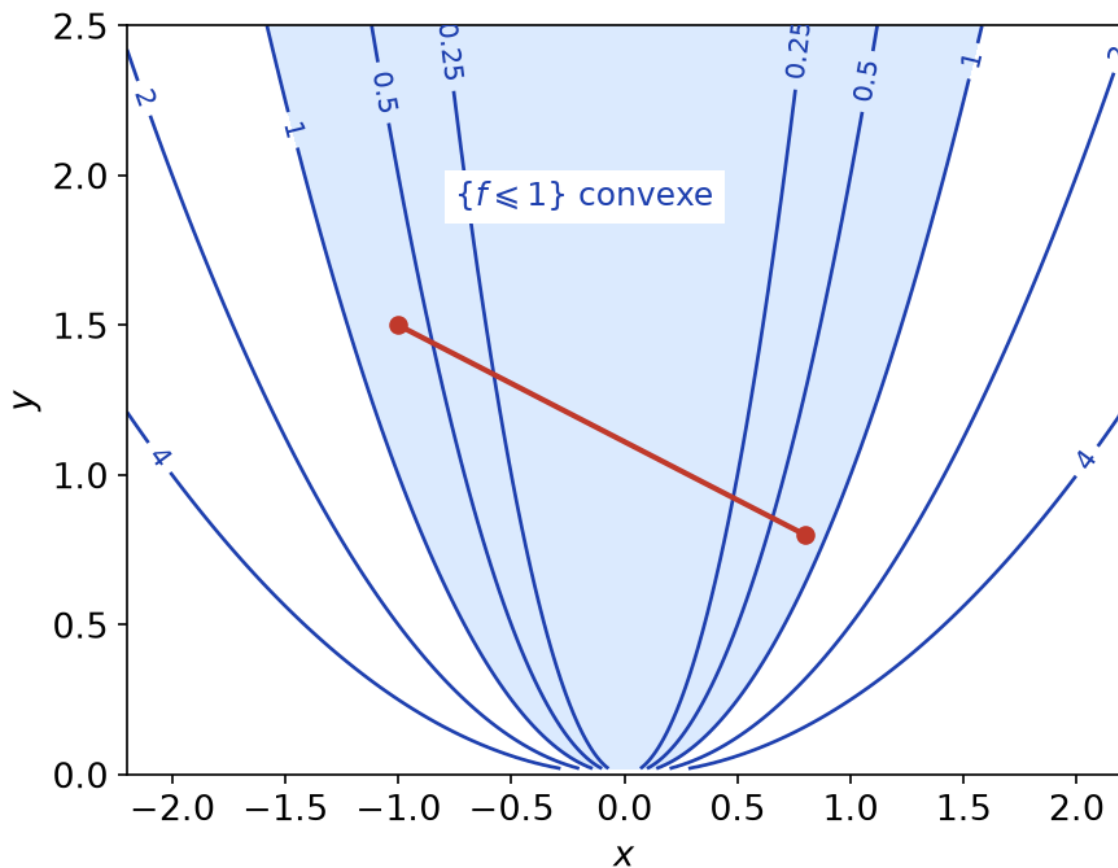
$$\det(I_n + H) = 1 + \text{tr } H + \frac{1}{2}((\text{tr } H)^2 - \text{tr}(H^2)) + o(|H|^2).$$

4. Pour $H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a
 $\det(I_2 + H) = (1+a)(1+d) - bc = 1 + (a+d) + (ad-bc)$. Par ailleurs,
 $\text{tr}(H^2) = a^2 + 2bc + d^2$. Ainsi $\frac{1}{2}((a+d)^2 - a^2 - 2bc - d^2) = ad - bc$. **La formule est exacte pour $n = 2$, le terme d'ordre deux étant $\det H$.**
5. Si ${}^tH = -H$, alors $\text{tr } H = 0$ et $h_{ji} = -h_{ij}$. Donc
 $\text{tr}(H^2) = \sum_{i,j} h_{ij}h_{ji} = -\sum_{i,j} h_{ij}^2$. Par conséquent
 $\det(I_n + H) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij}^2 + o(|H|^2)$.

Corrigé de l'exercice 18 : Convexité par la hessienne

1. On a $\partial_x f = \frac{2x}{y}$ et $\partial_y f = -\frac{x^2}{y^2}$. En dérivant encore,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{pmatrix}.$$
2. On calcule $d^2 f(x,y)((h,k),(h,k)) = \frac{2h^2}{y} - \frac{4xhk}{y^2} + \frac{2x^2k^2}{y^3}$. En factorisant par $\frac{2}{y}$, on reconnaît $\frac{2}{y}(h^2 - 2h\frac{x}{y}k + \frac{x^2}{y^2}k^2) = \frac{2}{y}(h - \frac{x}{y}k)^2$. Comme $y > 0$, cette quantité est positive. L'ouvert U est convexe. **D'après le cours, f est convexe sur U .**
3. Le long de la demi-droite $t \rightarrow (t,t)$, $t > 0$, on a $f(t,t) = t$, fonction affine. La restriction de f à un segment de cette demi-droite n'est pas strictement convexe. **Donc f n'est pas strictement convexe.** On le voit aussi sur la hessienne, dégénérée dans la direction $(h,k) = (x,y)$.
4. En $(1,1)$, $f(1,1) = 1$ et $\nabla f(1,1) = (2,-1)$. L'inégalité du plan tangent s'écrit
 $f(x,y) \geq 1 + 2(x-1) - (y-1) = 2x - y$. Directement, $\frac{x^2}{y} - 2x + y = \frac{(x-y)^2}{y} \geq 0$.
On retrouve bien $\frac{x^2}{y} \geq 2x - y$ sur U .
5. L'ensemble proposé est $\{p \in U : f(p) \leq 1\}$. Si $f(p) \leq 1$ et $f(q) \leq 1$, alors
 $f(tp + (1-t)q) \leq tf(p) + (1-t)f(q) \leq 1$. La figure ci-dessous représente ce sous-niveau et un segment qui y reste inclus. **Cet ensemble est donc convexe.**



Point de méthode : pour prouver qu'une hessienne est positive, écrivez la forme quadratique $d^2 f(x)(h, h)$ et cherchez une somme de carrés.

Corrigé de l'exercice 19 : Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

1. D'après l'exercice 1, avec A symétrique, le gradient de $x \rightarrow \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle$ vaut Ax . Celui de $x \rightarrow \langle b, x \rangle$ vaut b . Donc $\nabla J(x) = Ax - b$, et la hessienne de J est la matrice constante A .
2. La hessienne A est positive, et $\mathbb{R}^n$ est convexe. Ainsi J est convexe. Son unique point critique vérifie $Ax = b$, soit $x^* = A^{-1}b$, car A est inversible. Par le corollaire du cours,

x^* est un point de minimum global. De plus, $J(x^*) = \frac{1}{2} \langle b, A^{-1}b \rangle - \langle b, A^{-1}b \rangle$. **Donc**
 $x^* = A^{-1}b$ **et** $J(x^*) = -\frac{1}{2} \langle b, A^{-1}b \rangle$.

3. On développe, en utilisant la symétrie de A :

$$J(x^*+h) = J(x^*) + \langle Ax^* - b, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \text{ Or } Ax^* = b. \text{ Ainsi}$$

$J(x^*+h) = J(x^*) + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$, qui est strictement supérieur à $J(x^*)$ si $h \neq 0$. Cela confirme l'unicité du minimum.

4. On résout $2x+y = 1$ et $x+2y = 1$, d'où $x = y = \frac{1}{3}$. Ensuite, $\langle b, x^* \rangle = \frac{2}{3}$. **Le minimum est atteint en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et vaut $-\frac{1}{3}$.**

5. On a $|Mx-y|^2 = \langle {}^tMMx, x \rangle - 2\langle {}^tMy, x \rangle + |y|^2 = 2J(x) + |y|^2$, avec $A = {}^tMM$ et $b = {}^tMy$. La matrice A est symétrique. De plus, $\langle Ax, x \rangle = |Mx|^2 > 0$ si $x \neq 0$, car M est injective (rang n). Ainsi A est définie positive. **D'après la question 2, le minimum est unique et vérifie ${}^tMMx = {}^tMy$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Différentielle de $M \mapsto {}^tMM$

1. On développe : $f(M+H) = {}^tM + {}^tHM + {}^tMH + {}^tHH$. La norme de Frobenius est sous-multiplicative et invariante par transposition. Donc $|{}^tHH| \leq |H|^2 = o(|H|)$. Le terme ${}^tHM + {}^tMH$ est linéaire en H . **Ainsi** $df(M)(H) = {}^tHM + {}^tMH$.

2. On a $df(I_n)(H) = H + {}^tH$. Le noyau est formé des H telles que ${}^tH = -H$. L'image est incluse dans $\mathcal{S}_n$; réciproquement, $S \in \mathcal{S}_n$ vérifie $S = df(I_n)(\frac{1}{2}S)$. **Donc** $\ker df(I_n) = \mathcal{A}_n$ **et** $\text{Im } df(I_n) = \mathcal{S}_n$. Les dimensions $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$ sont cohérentes avec le théorème du rang.

3. L'image de $df(M)$ est incluse dans $\mathcal{S}_n$, car ${}^t({}^tHM) = {}^tMH$. Soit $S \in \mathcal{S}_n$ et $H = \frac{1}{2} {}^tM^{-1}S$. Alors ${}^tMH = \frac{1}{2}S$ et ${}^tHM = \frac{1}{2}S$. **Donc**
 $df(M)(H) = S$: l'application est surjective. Ensuite, $df(M)(H) = 0$ équivaut à ${}^tMH$ antisymétrique. **Donc** $\ker df(M) = \{{}^tM^1A : A \in \mathcal{A}_n\}$.

4. Pour tout t , $f(\Omega(t)) = I_n$. En dérivant en 0 par la règle de la chaîne,

$df(I_n)(\Omega'(0)) = 0$, c'est-à-dire $\frac{d}{dt}\Omega'(0) + \Omega'(0) = 0$. Pour la rotation
 $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, on trouve $R'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans les deux cas, $\Omega'(0)$ est antisymétrique.

Corrigé de l'exercice 21 : Fonctions homogènes et relation d'Euler

- Fixons $x \neq 0$ et dérivons $t \rightarrow f(tx) = t^\alpha f(x)$ sur $]0, +\infty[$. Par la règle de la chaîne, $df(tx)(x) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$. En $t = 1$, on obtient $df(x)(x) = \alpha f(x)$.
- Posons $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$ pour $t > 0$. Alors $g'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx) + t^{-\alpha} df(tx)(x)$. Or $df(tx)(x) = \frac{1}{t} df(tx)(tx) = \frac{\alpha}{t} f(tx)$ par la relation d'Euler. Donc $g'(t) = 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et $g(t) = g(1) = f(x)$. Ainsi $f(tx) = t^\alpha f(x)$: f est homogène de degré α .
- Fixons $t > 0$ et dérivons $x \rightarrow f(tx) = t^\alpha f(x)$ par rapport à x_i . La règle de la chaîne donne $t \partial_i f(tx) = t^\alpha \partial_i f(x)$. Donc $\partial_i f(tx) = t^{\alpha-1} \partial_i f(x)$: $\partial_i f$ est homogène de degré $\alpha-1$.
- On a $f(tx) = t^3 f(x)$ pour $t > 0$. Par ailleurs $f = q^{3/2}$ avec $q(x) = |x|_2^2$, donc $\nabla f(x) = \frac{3}{2} q(x)^{1/2} \cdot 2x = 3|x|_2 x$. Ainsi $df(x)(x) = 3|x|_2 |x|_2^2$. On retrouve $df(x)(x) = 3f(x)$.
- D'abord, pour $x \neq 0$ et $t > 0$, $f(x) = \frac{f(tx)}{t} = \frac{f(tx) - f(0)}{t}$. Quand $t \rightarrow 0^+$, ce quotient tend vers $df(0)(x)$. Donc $f(x) = df(0)(x)$ pour tout x , et $f = df(0)$ est linéaire.

La fonction $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ est homogène de degré 1. Pour tout $t \neq 0$, $\frac{f(tv)}{t} = f(v)$: elle admet donc en 0 la dérivée $D_v f(0) = f(v)$ selon tout vecteur. Cependant $f(1,0) = 1$, $f(0,1) = 0$ et $f(1,1) = \frac{1}{2} \neq 1+0$. Elle n'est pas linéaire. D'après ce qui précède, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Corrigé de l'exercice 22 : Dérivée seconde bornée et descente de gradient

1. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle H_f(x+th)h, h \rangle dt. \text{ Or}$$

$$|\langle H_f(z)h, h \rangle| \leq |H_f(z)| |h|^2 \leq M|h|^2, \text{ et } \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}. \text{ D'où}$$

$$|f(x+h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \frac{M}{2} |h|^2.$$

2. L'application $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 , de matrice jacobienne $H_f(x)$. Sa différentielle est donc de norme au plus M . Par l'inégalité des accroissements finis sur le convexe $\mathbb{R}^n$, $|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq M|x-y|$.

3. Appliquons la question 1 avec $h = -t\nabla f(x)$. On obtient

$$f(x_+) \leq f(x) - t|\nabla f(x)|^2 + \frac{M}{2}t^2|\nabla f(x)|^2. \text{ Ainsi}$$

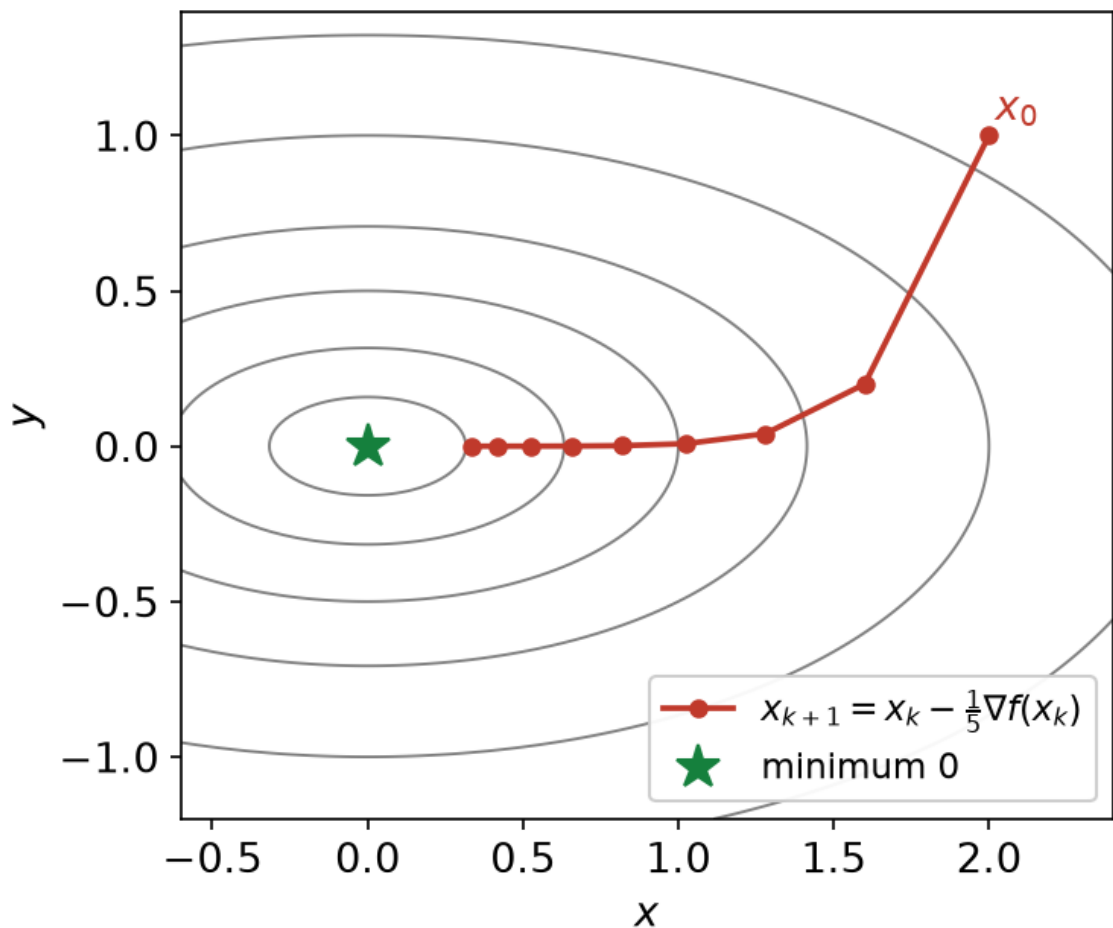
$f(x_+) \leq f(x) - t(1 - \frac{Mt}{2})|\nabla f(x)|^2$. Pour $0 < t < \frac{2}{M}$, la valeur de f décroît donc strictement tant que $\nabla f(x) \neq 0$.

4. Avec $t = \frac{1}{M}$, on a $t(1 - \frac{Mt}{2}) = \frac{1}{2M}$. Donc $|\nabla f(x_k)|^2 \leq 2M(f(x_k) - f(x_{k+1}))$. En sommant de 0 à N , la somme télescopique donne

$$\sum_{k=0}^N |\nabla f(x_k)|^2 \leq 2M(f(x_0) - f(x_{N+1})) \leq 2M(f(x_0) - m). \text{ La série converge,}$$

donc son terme général $|\nabla f(x_k)|^2$ tend vers 0.

5. Ici $\nabla f(x, y) = (x, 4y)$ et $H_f = \text{diag}(1, 4)$, donc $M = 4$; le pas $\frac{1}{5}$ est bien dans $]0, \frac{1}{2}[$. Les itérés vérifient $x_{k+1} = \frac{4}{5}x_k$ et $y_{k+1} = \frac{1}{5}y_k$. **Donc $x_k = 2(\frac{4}{5})^k$ et $y_k = (\frac{1}{5})^k$** , qui tendent vers le minimum $(0, 0)$, comme le montre la figure ci-dessous. Pour le premier pas, $f(2, 1) = 4$ et $x_1 = (1, 6; 0, 2)$, donc $f(x_1) = \frac{2,56 + 0,16}{2} = 1,36$. La borne vaut $4 - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 20 = 1,6$. **On a bien $1,36 \leq 1,6$.**



Point de méthode : l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 est l'outil standard pour contrôler une fonction autour de son approximation affine.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème, une équation intégrale non linéaire

1. Pour $u \in E$, u^2 est continue, donc sa primitive $G(u)$ nulle en 0 est continue : $G(u) \in E$. Ensuite, pour $t \in [0,1]$,

$$G(u+h)(t) - G(u)(t) - 2 \int_0^t u h = \int_0^t h(s)^2 ds \in [0, |h|_\infty^2].$$

Posons $L_u(h)(t) = 2 \int_0^t u(s)h(s) ds$. Cette application est linéaire et vérifie

$$|L_u(h)(t)| \leq 2t|u|_\infty |h|_\infty. \text{ Elle est donc continue et le reste est un } o(|h|_\infty). \text{ Ainsi } dG(u) = L_u, \text{ avec } |dG(u)| \leq 2|u|_\infty.$$

2. On a $(dG(u) - dG(v))(h)(t) = 2 \int_0^t (u-v)h$, de valeur absolue au plus $2|u-v|_\infty |h|_\infty$.

Donc $|dG(u) - dG(v)| \leq 2|u-v|_\infty$. **L'application dG est lipschitzienne, donc G est de classe C^1 .**

3. Posons $A(k)(h)(t) = \int_0^t k(s)h(s) ds$. Alors $dG = 2A$, et $A: E \rightarrow \mathcal{L}_c(E, E)$ est linéaire, de norme au plus 1. Une application linéaire continue est différentiable et égale à sa

différentielle. Donc dG est différentiable, et $d^2G(u)(h, k)(t) = 2 \int_0^t h(s)k(s) ds$, forme

bilinéaire symétrique. Enfin, $\frac{1}{2}d^2G(u)(h, h) = \int_0^t h^2$, qui est exactement le reste de la question

1. La formule de Taylor à l'ordre 2 est donc exacte :

$$G(u+h) = G(u) + dG(u)(h) + \frac{1}{2}d^2G(u)(h, h).$$

4. La boule B est convexe et, pour $u \in B$, $|dG(u)| \leq 2|u|_\infty \leq 2$. L'inégalité des accroissements finis s'applique sur tout segment de B , qui reste dans B . Elle est énoncée pour un ouvert, mais on l'applique sur la boule ouverte de rayon $1 + \delta$, où $|dG| \leq 2 + 2\delta$, puis on fait $\delta \rightarrow 0$. **Ainsi $|G(u) - G(v)|_\infty \leq 2|u-v|_\infty$ pour $u, v \in B$.**

5. Soit $u \in B$. Alors $|G(u)(t)| \leq \int_0^1 u^2 \leq 1$, donc $|T(u)|_\infty \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \leq 1$:

$T(B) \subset B$. Ensuite, $|T(u) - T(v)|_\infty = |\lambda| |G(u) - G(v)|_\infty \leq \frac{1}{2}|u-v|_\infty$. Enfin, B est fermée dans l'espace complet E , donc complète. Le théorème du point fixe de Picard s'applique.

L'équation $u = f + \lambda G(u)$ admet une unique solution dans B .

6. Soit $u(t) = \frac{1}{2-\lambda t}$, bien défini car $2 - \lambda t \geq \frac{7}{4}$. Si $\lambda \neq 0$, on calcule

$\frac{1}{2} + \lambda \int_0^t \frac{ds}{(2-\lambda s)^2} = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2-\lambda s} \right]_0^t = \frac{1}{2-\lambda t}$; si $\lambda = 0$, $u = \frac{1}{2}$ convient aussi. De plus, $0 < u(t) \leq \frac{4}{7}$, donc $u \in \mathcal{B}$. Par unicité, **la solution est** $u(t) = \frac{1}{2-\lambda t}$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [calcul différentiel, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur calcul différentiel](#)
- À maîtriser avant : [Espaces normés et applications linéaires continues](#)
- Chapitre précédent : [Réduction de Jordan et décomposition de Dunford](#)
- Chapitre suivant : [Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés](#)
- Le même thème en maths spé : [calcul différentiel, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)