

Calcul de primitives

Exercice 1 : Primitives usuelles

Déterminez une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

2. $f_2(x) = e^{2x} + \cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. $f_3(x) = \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}$.

4. $f_4(x) = \frac{1}{4+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

5. $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ sur $] -3, 3[$.

Exercice 2 : Reconnaître la dérivée d'une composée

Pour chaque fonction, reconnaissez une forme $u' \times G'(u)$ et donnez une primitive sur l'intervalle indiqué.

1. $g_1(x) = x e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

2. $g_2(x) = \tan x$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. $g_3(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

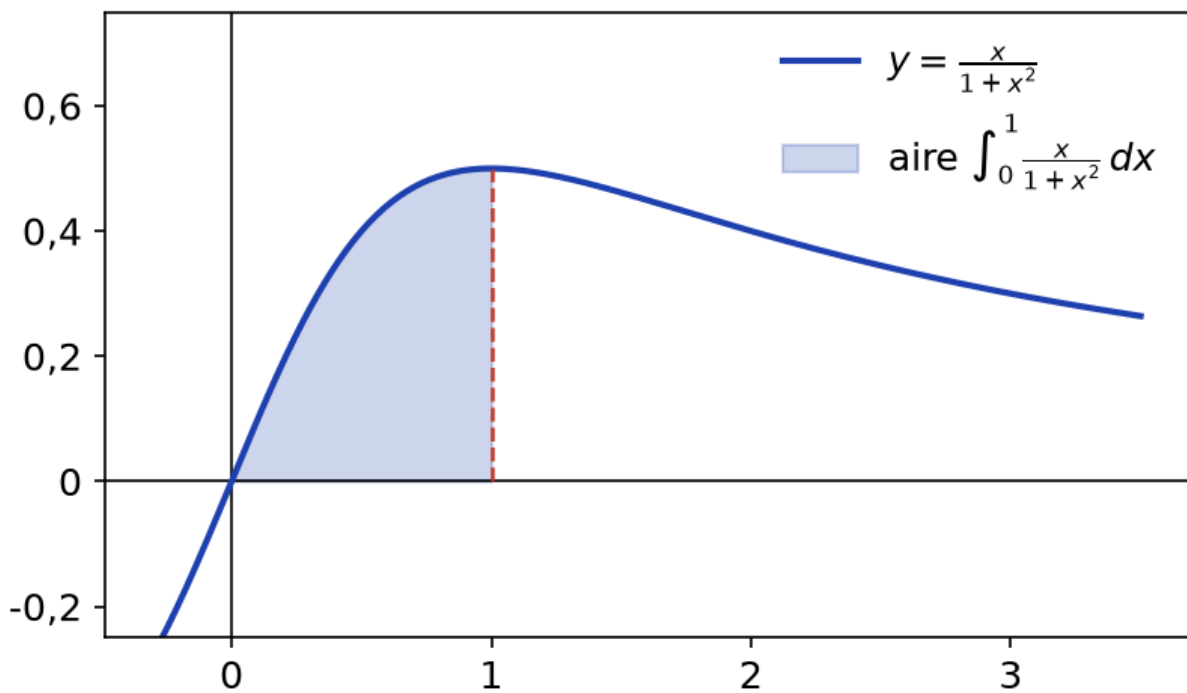
4. $g_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

5. $g_5(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1, +\infty[$.

6. $g_6(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Intégrales calculées par primitives

Calculez les intégrales suivantes en exhibant une primitive. La figure ci-dessous représente la première comme une aire.



1. $A = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.

2. $B = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

$$3. \quad C = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$4. \quad D = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

Exercice 4 : Fonctions définies par une intégrale

Dans cet exercice, aucune primitive explicite n'est demandée.

1. On pose $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. Justifiez que F est dérivable, calculez F' et déduisez-en le sens de variation de F .

2. Montrez que F est impaire. On pourra dériver $x \rightarrow F(-x) + F(x)$.

3. On pose $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. Justifiez que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $G'(x)$.

4. On pose $H(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{1+t^2}$. Calculez $H'(x)$ de deux façons : par la formule de dérivation, puis en calculant H explicitement.

Exercice 5 : Premières intégrations par parties

Calculez à l'aide d'une intégration par parties.

1. $\int_0^1 x e^x dx.$

2. $\int_1^e \ln x dx.$

3. $\int_0^\pi x \sin x dx.$

4. Une primitive de $x \rightarrow x \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Intégrations par parties successives

1. À l'aide de deux intégrations par parties, déterminez une primitive de $x \rightarrow x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis

calculez $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$

2. Déterminez une primitive de $x \rightarrow (\ln x)^2$ sur $]0, +\infty[$, puis calculez $\int_1^e (\ln x)^2 dx.$

3. Déterminez une primitive de $x \rightarrow \arcsin x$ sur $] -1, 1[$.

Exercice 7 : Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$

1. Calculez W_0 et W_1 .

2. Montrez que $W_n > 0$ et que la suite (W_n) est décroissante.

3. À l'aide d'une intégration par parties sur $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n+1} x \, dx$, montrez que
- $$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$
4. Déduisez-en W_2 , W_3 , W_4 et W_5 .
5. Montrez que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donnez sa valeur.

Exercice 8 : Changements de variable élémentaires

Calculez les intégrales suivantes avec le changement de variable indiqué.

- $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} \, dx$, en posant $u = x^3$.
- $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$, en posant $u = \sqrt{x}$.
- $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+e^x}$, en posant $u = e^x$.
- $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$, en posant $x = \sin t$.

Exercice 9 : Changements de variable et symétries

1. On pose $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \, dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$. À l'aide du changement

de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, montrez que $I = J$. Calculez $I + J$, puis I .

2. On pose $K = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. Avec $x = \pi - t$, montrez que

$$2K = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

3. Calculez cette dernière intégrale par le changement de variable $u = \cos t$, puis donnez K .

Exercice 10 : Primitives de $1/(ax^2 + bx + c)$

Déterminez une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué. Précisez à chaque fois le signe du discriminant.

1. $h_1(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ sur $]2, +\infty[$.

2. $h_2(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$ sur $]2, +\infty[$.

3. $h_3(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$ sur $\mathbb{R}$.

4. $h_4(x) = \frac{1}{2x^2 + 2x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : Intégrales de fractions du second degré

Calculez les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$

2. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx$.

3. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+3} dx$.

Exercice 12 : Exponentielle complexe et produits amortis

1. En primitivant $x \rightarrow e^{(1+2i)x}$, déterminez une primitive de $x \rightarrow e^x \cos(2x)$ et une primitive de $x \rightarrow e^x \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculez $\int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx$ par la même méthode.

3. Retrouvez ce dernier résultat par deux intégrations par parties.

Exercice 13 : Linéarisation et puissances trigonométriques

1. Déterminez une primitive de $x \rightarrow \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$, en écrivant $\sin^3 x = \sin x (1 - \cos^2 x)$.

2. Calculez $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

3. À l'aide des formules d'Euler, linéarisez $\cos^4 x$, puis calculez $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$.

4. À l'aide du changement de variable $u = \sin x$, déterminez une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 14 : Le changement de variable $t = \tan(x/2)$

On veut calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

1. Pour $x \in]-\pi, \pi[$, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrez que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
2. Justifiez le changement de variable $x = 2\arctan t$ et exprimez dx en fonction de dt .
3. Montrez que $I = \int_0^1 \frac{2 dt}{3+t^2}$, puis calculez I .

Exercice 15 : Fonctions hyperboliques

1. Calculez $\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x \, dx$.
2. Vérifiez que $x \rightarrow 2\arctan(e^x)$ est une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbb{R}$.
3. On note $a = \ln(1 + \sqrt{2})$. Vérifiez que $\operatorname{sh} a = 1$ et $\operatorname{ch} a = \sqrt{2}$.
4. À l'aide du changement de variable $x = \operatorname{sh} t$, calculez $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx$.

Exercice 16 : Primitives à valeurs complexes

Soient a et b deux réels avec $b \neq 0$, et $\alpha = a + ib$.

1. Écrivez $\frac{1}{x-\alpha}$ sous la forme $u(x) + i v(x)$ avec u, v réelles, pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Déduisez-en qu'une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x-\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \rightarrow \ln|x-\alpha| + i \arctan \frac{x-\alpha}{b}$.
3. Vérifiez que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$ et retrouvez ainsi une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$.
4. Expliquez pourquoi on ne peut pas écrire « $\ln(x-\alpha)$ » comme primitive, même si la formule $(\ln u)' = u'/u$ semble le suggérer.

Exercice 17 : Une suite d'intégrales de fractions

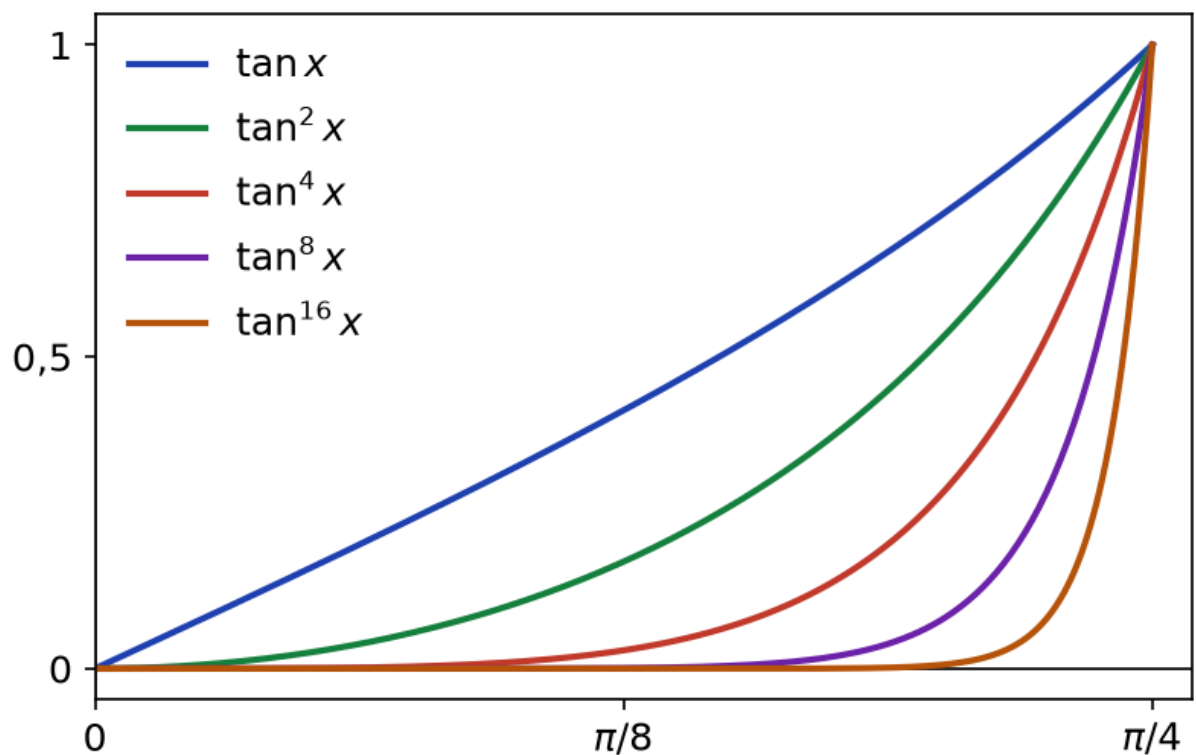
Pour $n \geq 1$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1. Calculez J_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que pour tout $n \geq 1$:

$$2n J_{n+1} = (2n-1)J_n + \frac{1}{2^n}.$$
3. Déduisez-en J_2 et J_3 .
4. Montrez que $(1+x^2)^n \geq 1+nx^2$ pour x réel et $n \geq 1$.
5. Déduisez-en $0 \leq J_n \leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$, puis la limite de (J_n) .

Exercice 18 : Problème, intégrales des puissances de la tangente

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$. La figure ci-dessous représente quelques fonctions $\tan^n$ sur $[0, \pi/4]$.



1. Calculez I_0 et I_1 .

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

3. Montrez que (I_n) est positive et décroissante.

4. Dédisez des deux questions précédentes que pour $n \geq 2$: $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.
Donnez la limite de (I_n) .

5. Par le changement de variable $u = \tan x$, montrez que $I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrez que $(-1)^n I_{2n} = \frac{\pi}{4} - S_n$, puis déterminez la limite de (S_n) .

7. De même, montrez que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ tend vers $\ln 2$.

Exercice 19 : Une intégrale de concours

On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

1. Par le changement de variable $x = \tan t$, montrez que $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt$.
2. Montrez que pour $u \in [0, \frac{\pi}{4}]$: $1 + \tan(\frac{\pi}{4} - u) = \frac{2}{1 + \tan u}$.
3. Par le changement de variable $t = \frac{\pi}{4} - u$, déduisez-en la valeur de I .

Exercice 20 : Intégrales à bornes variables

1. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$. Calculez $F'(x)$, puis montrez que F est nulle sur $]0, +\infty[$.
2. Retrouvez ce résultat par le changement de variable $t = 1/u$.
3. Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\arctan t}{t} dt$. Montrez que $G'(x) = \frac{\arctan x + \arctan(1/x)}{x}$.
4. Rappelez la valeur de $\arctan x + \arctan(1/x)$ pour $x > 0$, puis exprimez $G(x)$ à l'aide de $\ln x$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [calcul de primitives, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Chapitre précédent : [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Chapitre suivant : [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)