

Calcul de primitives

Corrigé de l'exercice 1 : Primitives usuelles

Chaque fonction est continue sur l'intervalle indiqué, donc elle admet des primitives. On lit le tableau des primitives usuelles, puis on vérifie par dérivation.

1. On écrit $f_1(x) = x^3 - 2x^{-2} + x^{-1/2}$. Chaque terme est une puissance d'exposant différent de -1 . Ainsi $F_1(x) = \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{1/2}}{1/2}$, soit $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x} + 2\sqrt{x}$.

2. Une primitive de e^{2x} est $\frac{e^{2x}}{2}$, et une primitive de $\cos(3x)$ est $\frac{\sin(3x)}{3}$. Donc $F_2(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\sin(3x)}{3}$.

3. De même, $\operatorname{ch}(2x)$ a pour primitive $\frac{\operatorname{sh}(2x)}{2}$ et $\operatorname{sh} x$ a pour primitive $\operatorname{ch} x$. Par conséquent, $F_3(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2} - \operatorname{ch} x$.

4. La formule $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ avec $a = 2$ donne $F_4(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$.
Vérification : $F_4'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{1 + x^2/4} = \frac{1}{4 + x^2}$.

5. La formule $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$ avec $a = 3$ s'applique sur $] -3, 3[$. Ainsi $F_5(x) = \arcsin \frac{x}{3}$.

Corrigé de l'exercice 2 : Reconnaître la dérivée d'une composée

Dans chaque cas, on identifie u , on vérifie la présence de u' , puis on applique la formule $(G \circ u)' = u' \cdot G' \circ u$.

1. Avec $u(x) = x^2$, on a $u'(x) = 2x$, donc $g_1 = \frac{1}{2}u'e^u$. Ainsi $G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.
2. On écrit $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u = \cos$. Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x > 0$. Donc $G_2(x) = -\ln(\cos x)$.
3. Avec $u = \ln$, on a $u'(x) = 1/x$ et $g_3 = u'u$. Par conséquent, $G_3(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$.
4. Avec $u(x) = 1 + x^2 > 0$, on a $g_4 = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$. Or $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$. Ainsi $G_4(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
5. Sur $]1, +\infty[$, $u = \ln$ est strictement positive et $g_5 = \frac{u'}{u}$. Donc $G_5(x) = \ln(\ln x)$.
6. Avec $u(x) = e^x$, on a $u' = u$ et $g_6 = \frac{u'}{1 + u^2}$. Par conséquent, $G_6(x) = \arctan(e^x)$.

Point de méthode : vérifiez toujours le résultat en le dérivant. Cette vérification prend quelques secondes et évite la plupart des erreurs de constante.

Corrigé de l'exercice 3 : Intégrales calculées par primitives

Les fonctions intégrées sont continues sur les segments considérés. On applique donc la formule

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

1. Une primitive de $\frac{x}{1+x^2}$ est $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Ainsi $A = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1$, soit $A = \frac{\ln 2}{2}$. Cette valeur, proche de 0,35, est cohérente avec l'aire de la figure de l'énoncé.
2. Avec $u = \cos$, $\sin x \cos^2 x = -u'u^2$, de primitive $-\frac{\cos^3 x}{3}$. Donc $B = -\frac{0}{3} + \frac{1}{3}$,

soit $B = \frac{1}{3}$.

3. La fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}] \subset]-1, 1[$. Donc $C = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0$,
soit $C = \frac{\pi}{6}$.

4. Une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est $\frac{(\ln x)^2}{2}$. Ainsi $D = \frac{1}{2} - 0$, soit $D = \frac{1}{2}$.

Point de méthode : avant de chercher une méthode compliquée, regardez si l'intégrande est une dérivée de composée. Dans cet exercice, aucune intégration par parties ni aucun changement de variable n'est nécessaire.

Corrigé de l'exercice 4 : Fonctions définies par une intégrale

- La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de cette fonction nulle en 0. Donc F est dérivable et $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. Par conséquent, **F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**
- Posons $\psi(x) = F(-x) + F(x)$. Par dérivation d'une composée,
 $\psi'(x) = -F'(-x) + F'(x) = -e^{-x^2} + e^{-x^2} = 0$. Ainsi ψ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus, $\psi(0) = 2F(0) = 0$. Donc **$F(-x) = -F(x)$ pour tout réel x : F est impaire.**
- La fonction $f : t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $1+t^4 > 0$. Soit Φ une primitive de f . Alors $G(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$, qui est dérivable comme composée et différence. Ainsi $G'(x) = 2f(2x) - f(x)$, soit $G'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.
- D'abord, la formule du cours avec $u = 0$ et $v = \sin$ donne $H'(x) = \cos x \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x}$.
Ensuite, une primitive de $\frac{1}{1+t^2}$ est $\arctan$, donc
 $H(x) = \arctan(\sin x) - \arctan 0 = \arctan(\sin x)$. En dérivant, on retrouve
 $H'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$. Finalement, $H'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

Point de méthode : pour une intégrale de la forme $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$, introduisez une primitive Φ de f , même sans la connaître explicitement. L'intégrale vaut alors $\Phi(v(x)) - \Phi(u(x))$, et la dérivation d'une composée fait le reste.

Corrigé de l'exercice 5 : Premières intégrations par parties

Toutes les fonctions choisies sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur les segments considérés, donc le théorème d'intégration par parties s'applique.

1. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. Alors

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

Ainsi $\int_0^1 x e^x dx = 1$.

2. On écrit $\ln x = 1 \times \ln x$, avec $u = \ln$ et $v' = 1$. Donc $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = x$. Il vient

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1.$$

Par conséquent, $\int_1^e \ln x dx = 1$.

3. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$, d'où $v(x) = -\cos x$. Ensuite

$$\int_0^\pi x \sin x dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi.$$

Ainsi $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \pi$.

4. Pour x réel, on pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(2t)$, d'où $v(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$. Alors

$$\int_0^x t \cos(2t) \, dt = \frac{x \sin(2x)}{2} - \int_0^x \frac{\sin(2t)}{2} \, dt = \frac{x \sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x) - 1}{4}.$$

En supprimant la constante, **une primitive est** $x \rightarrow \frac{x \sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}$.

Corrigé de l'exercice 6 : Intégrations par parties successives

1. Première intégration par parties, avec $u = x^2$ et $v' = e^{-x}$, donc $v = -e^{-x}$:

$$\int x^2 e^{-x} \, dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} \, dx.$$

Deuxième intégration par parties, avec $u = 2x$ et $v' = e^{-x}$:

$\int 2x e^{-x} \, dx = -2x e^{-x} + \int 2e^{-x} \, dx = -2x e^{-x} - 2e^{-x}$. Ainsi **une primitive est** $x \rightarrow -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$. On vérifie : la dérivée vaut $-(2x + 2)e^{-x} + (x^2 + 2x + 2)e^{-x} = x^2 e^{-x}$. Par conséquent,

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx = -5e^{-1} + 2, \text{ soit } 2 - \frac{5}{e}.$$

2. Avec $u = (\ln x)^2$ et $v' = 1$, on a $u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ et $v(x) = x$. Donc

$\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x \, dx$. Or une primitive de $\ln$ est $x \ln x - x$. Ainsi **une primitive est** $x \rightarrow x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$. En e , elle vaut $e - 2e + 2e = e$;

en 1, elle vaut 2. Finalement, $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$.

3. Sur $] -1, 1[$, $\arcsin$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour $x \in] -1, 1[$, avec $u = \arcsin$ et $v' = 1$:

$$\int_0^x \arcsin t \, dt = x \arcsin x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1.$$

En effet, $-\sqrt{1-t^2}$ est une primitive de $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$. Ainsi **une primitive est**
 $x \rightarrow x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Point de méthode : avec un polynôme de degré n multiplié par une exponentielle, il faut n intégrations par parties. On peut aussi chercher directement une primitive de la forme $P(x)e^{-x}$ avec P de même degré, puis identifier les coefficients.

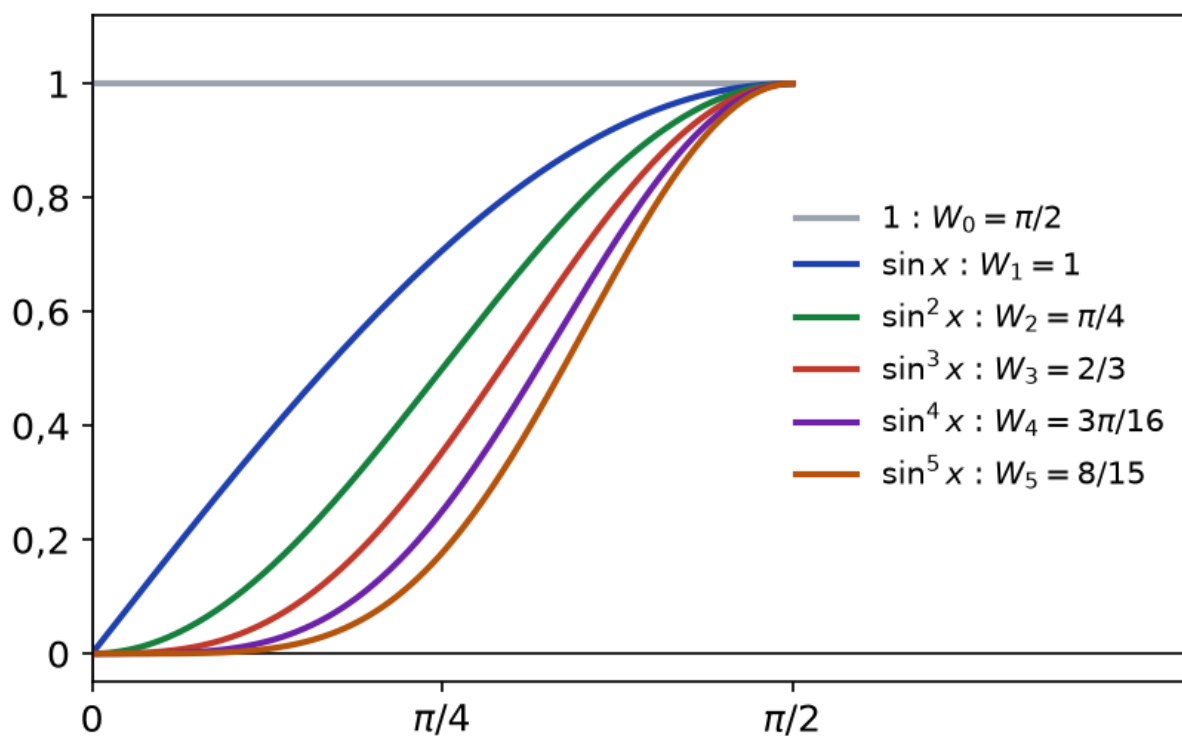
Corrigé de l'exercice 7 : Intégrales de Wallis

- On a $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$, donc $W_0 = \frac{\pi}{2}$. Ensuite $W_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0 + 1$, donc $W_1 = 1$.
- Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^n$ est continue, positive, et non identiquement nulle, car elle vaut 1 en $\frac{\pi}{2}$. Une fonction continue positive non nulle sur un segment a une intégrale strictement positive. Donc $W_n > 0$. De plus, $0 \leq \sin x \leq 1$ entraîne $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$. Par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$: **la suite est décroissante**.
- Posons $u(x) = \sin^{n+1} x$ et $v'(x) = \sin x$. Ces fonctions sont $\mathcal{C}^1$, avec $u'(x) = (n+1)\cos x \sin^n x$ et $v(x) = -\cos x$. Alors

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^n x \, dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, dx = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

Le crochet est nul, car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin 0 = 0$. En regroupant,
 $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

4. On applique la relation avec $n = 0, 1, 2, 3$: $W_2 = \frac{1}{2}W_0$, $W_3 = \frac{2}{3}W_1$,
 $W_4 = \frac{3}{4}W_2$ et $W_5 = \frac{4}{5}W_3$. Ainsi $W_2 = \frac{\pi}{4}$, $W_3 = \frac{2}{3}$, $W_4 = \frac{3\pi}{16}$,
 $W_5 = \frac{8}{15}$. Comme le montre la figure ci-dessous, les courbes de $\sin^n x$ s'écrasent vers 0 sauf
près de $\frac{\pi}{2}$, ce qui explique la décroissance des aires.



5. Posons $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. En multipliant la relation de la question 3 par W_{n+1} , on obtient $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$. Donc la suite est constante, égale à $u_0 = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$ **pour tout** n .

Corrigé de l'exercice 8 : Changements de variable élémentaires

1. On pose $u = x^3$: la fonction $x \rightarrow x^3$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $du = 3x^2 dx$. Les bornes deviennent 0 et 1. La fonction $u \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{18}.$$

Ainsi l'intégrale vaut $\frac{\pi}{18}$.

2. On pose $u = \sqrt{x}$, c'est-à-dire $x = u^2$ avec $u \in [1, 2]$. La fonction $u \rightarrow u^2$ est $\mathcal{C}^1$, et $dx = 2u du$. Alors

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{2u du}{u(1+u)} = 2[\ln(1+u)]_1^2 = 2\ln \frac{3}{2}.$$

L'intégrale vaut donc $2\ln \frac{3}{2}$.

3. On pose $x = \ln u$ avec $u \in [1, 2]$, donc $dx = \frac{du}{u}$. De plus, $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$. Ainsi

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^2 \frac{du}{u(1+u)} = \left[\ln \frac{u}{1+u} \right]_1^2 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{4}{3}.$$

Le résultat est $\ln \frac{4}{3}$.

4. On pose $x = \sin t$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{6}]$, et $dx = \cos t dt$. Sur cet intervalle, $\cos t > 0$, donc $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Il vient

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/6} \sin^2 t dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Finalement, l'intégrale vaut $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

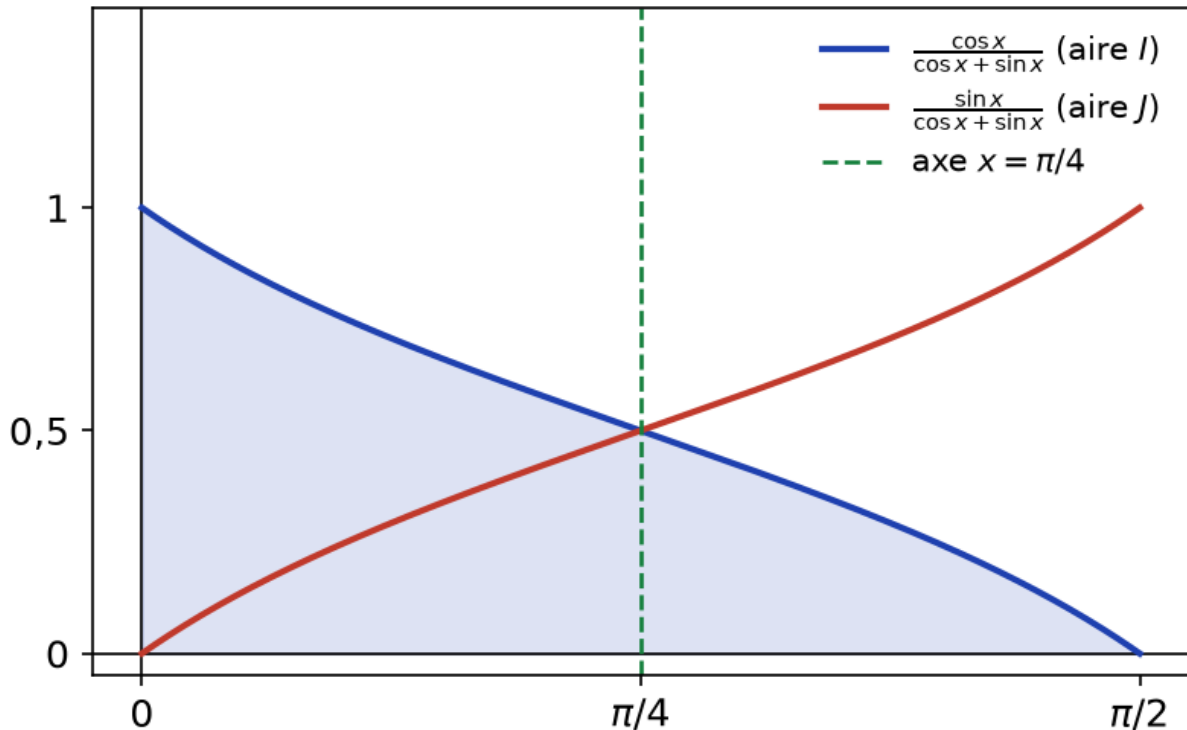
Point de méthode : après un changement de variable, relisez votre nouvelle intégrale et vérifiez trois choses. La fonction a-t-elle été transformée ? L'élément dx a-t-il été remplacé ? Les bornes ont-elles changé ? Un oubli sur l'un des trois points fausse tout le résultat.

Corrigé de l'exercice 9 : Changements de variable et symétries

1. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x + \sin x \geq 1 > 0$, donc les deux intégrandes sont continues. On pose $x = \frac{\pi}{2} - t$, qui est $\mathcal{C}^1$, avec $dx = -dt$. Alors $\cos x = \sin t$ et $\sin x = \cos t$, et les bornes s'échangent. Ainsi

$$I = \int_{\pi/2}^0 \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} (-dt) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = J.$$

Ensuite, $I + J = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $I = J = \frac{\pi}{4}$. La figure ci-dessous montre que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{4}$.



2. On pose $x = \pi - t$, avec $dx = -dt$. Alors $\sin x = \sin t$ et $\cos^2 x = \cos^2 t$. Donc

$$K = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - K.$$

En regroupant, $2K = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$

3. On pose $u = \cos t$, avec $du = -\sin t dt$; les bornes 0 et π deviennent 1 et -1 .
Ainsi

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int_1^{-1} \frac{-du}{1 + u^2} = \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, $2K = \frac{\pi^2}{2}$, soit $K = \frac{\pi^2}{4}$.

Point de méthode : sur $[a, b]$, le changement $x = a + b - t$ laisse les bornes inchangées. Il est efficace dès que l'intégrande se transforme en une expression « complémentaire ».

Corrigé de l'exercice 10 : Primitives de $1/(ax^2 + bx + c)$

1. Ici $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, de racines 1 et 2 . On décompose :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \text{ ce qui se vérifie en réduisant au même dénominateur. Sur }]2, +\infty[, \text{ les deux facteurs sont positifs. Donc } H_1(x) = \ln \frac{x-2}{x-1}.$$

2. Ici $\Delta = 16 - 16 = 0$, et $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Une primitive de $(x-2)^{-2}$ est $-(x-2)^{-1}$. Ainsi $H_2(x) = -\frac{1}{x-2}$.

3. Ici $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. La forme canonique est $(x+1)^2 + 4$. Avec $X = x+1$ et $a = 2$, on obtient $H_3(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2}$.

4. Ici $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. On factorise :

$$2x^2 + 2x + 1 = 2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} [(2x+1)^2 + 1]. \text{ Donc}$$

$h_4(x) = \frac{2}{1 + (2x + 1)^2}$, qui est de la forme $\frac{u'}{1 + u^2}$ avec $u = 2x + 1$. Par conséquent, $H_4(x) = \arctan(2x + 1)$.

Point de méthode : commencez toujours par le calcul du discriminant. Il décide à lui seul de la forme de la primitive : logarithmes, fraction ou arctangente. Ensuite, vérifiez la décomposition en réduisant au même dénominateur.

Corrigé de l'exercice 11 : Intégrales de fractions du second degré

1. Le discriminant vaut $1 - 4 = -3 < 0$, et $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Avec $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, une primitive est $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Donc l'intégrale vaut $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

2. On fait apparaître la dérivée du dénominateur : $2x + 3 = (2x + 1) + 2$. D'une part,

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = [\ln(x^2+x+1)]_0^1 = \ln 3. \text{ D'autre part, la question précédente donne}$$

le second morceau. Ainsi $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx = \ln 3 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

3. Ici $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$, car $\Delta = 4 > 0$. Cherchons α, β tels que

$\frac{x}{(x+1)(x+3)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+3}$. En multipliant par $x+1$ puis en prenant $x = -1$, on obtient $\alpha = -\frac{1}{2}$. De même, $\beta = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. Donc

$$\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 4x + 3} = \left[-\frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{3}{2} \ln(x+3) \right]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{2} \ln 4 - \frac{3}{2} \ln 3.$$

Comme $\ln 4 = 2\ln 2$, on obtient $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$, soit environ 0,085.

Point de méthode : lorsque le numérateur est de degré un, faites d'abord apparaître la dérivée du dénominateur. Le reste est une constante divisée par le trinôme, que l'on traite selon le signe du discriminant.

Corrigé de l'exercice 12 : Exponentielle complexe et produits amortis

1. Posons $\lambda = 1 + 2i \neq 0$. Une primitive de $e^{\lambda x}$ est $\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}$, et $\frac{1}{\lambda} = \frac{1-2i}{5}$. Ensuite,

$(1-2i)(\cos 2x + i\sin 2x) = (\cos 2x + 2\sin 2x) + i(\sin 2x - 2\cos 2x)$. Or $e^x \cos(2x)$ et $e^x \sin(2x)$ sont les parties réelle et imaginaire de $e^{\lambda x}$. Donc

$x \rightarrow \frac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{5}$ est une primitive de $e^x \cos(2x)$ et

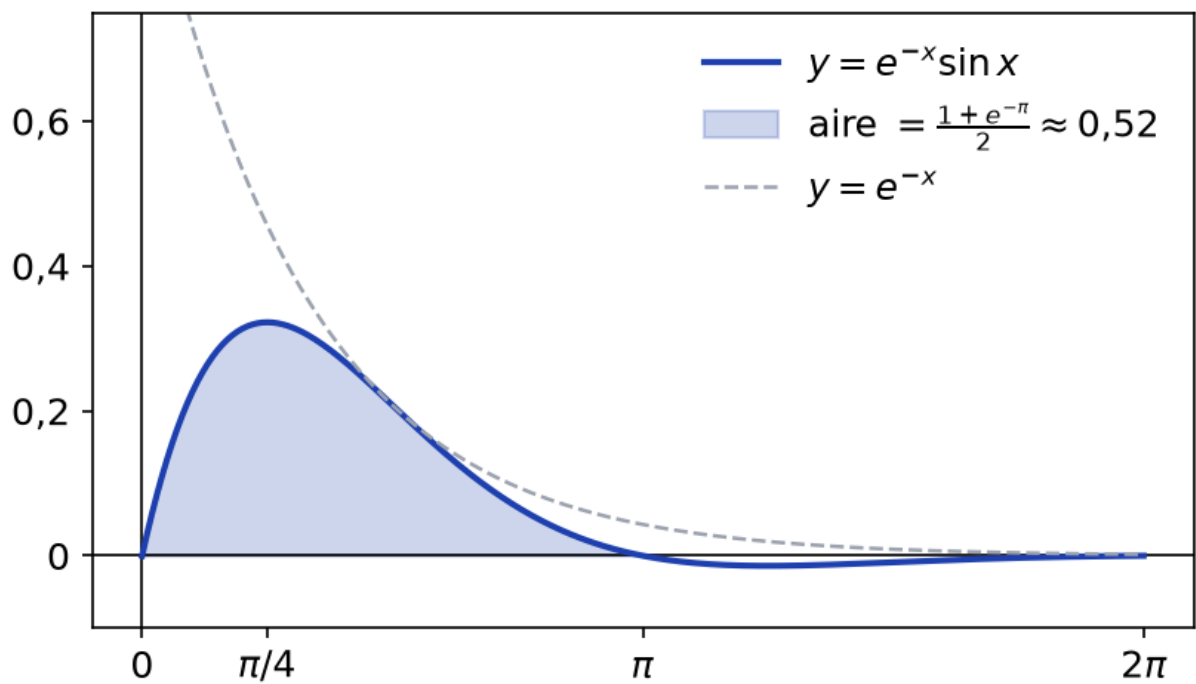
$x \rightarrow \frac{e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)}{5}$ est une primitive de $e^x \sin(2x)$.

2. Posons cette fois $\lambda = -1 + i$, donc $\frac{1}{\lambda} = \frac{-1-i}{2}$. On calcule

$(-1-i)(\cos x + i\sin x) = (\sin x - \cos x) - i(\sin x + \cos x)$. Ainsi une primitive de $e^{-x} \sin x$ est $G(x) = -\frac{e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2}$. Par conséquent,

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx = G(\pi) - G(0) = \frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}.$$

L'intégrale vaut $\frac{1 + e^{-\pi}}{2} \approx 0,52$. La figure ci-dessous représente cette aire sous la courbe amortie.



3. Notons I l'intégrale et $L = \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx$. Une intégration par parties, avec $u = \sin$ et $v'(x) = e^{-x}$, donne $I = [-e^{-x} \sin x]_0^{\pi} + L = L$. Une seconde, avec $u = \cos$, donne

$$L = [-e^{-x} \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx = e^{-\pi} + 1 - I.$$

Ainsi $I = 1 + e^{-\pi} - I$, et l'on retrouve $I = \frac{1+e^{-\pi}}{2}$.

Point de méthode : la méthode complexe demande seulement le calcul de $\frac{1}{\lambda}$ puis d'une partie réelle ou imaginaire. Elle évite ainsi la double intégration par parties, où les erreurs de signe sont fréquentes.

Corrigé de l'exercice 13 : Linéarisation et puissances

trigonométriques

1. On écrit $\sin^3 x = \sin x - \sin x \cos^2 x$. Le second terme est $u'u^2$ avec $u = \cos$, de primitive $\frac{\cos^3 x}{3}$. Donc **une primitive de $\sin^3$ est** $x \rightarrow -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$. On vérifie : la dérivée vaut $\sin x - \cos^2 x \sin x = \sin x(1 - \cos^2 x)$.

2. On a $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$, donc $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2(2x)}{4} = \frac{1 - \cos(4x)}{8}$. Ainsi

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx = \left[\frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\pi}{8}$.

3. Par la formule d'Euler et la formule du binôme :

$$\cos^4 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^4}{16} = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} = \frac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}.$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, les primitives $\frac{\sin 4x}{4}$ et $\frac{\sin 2x}{2}$ prennent la valeur 0 aux deux bornes. Donc

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{16}. \text{ On retrouve la valeur de } W_4 \text{ de l'exercice 7, ce qui est cohérent par}$$

le changement $x = \frac{\pi}{2} - t$.

4. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on écrit $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$. La fonction $f(u) = \frac{1}{1 - u^2}$ est continue sur $] -1, 1[$, qui contient $\sin([0, x])$. Le changement de variable $u = \sin s$ donne

$$\int_0^x \frac{ds}{\cos s} = \int_0^{\sin x} \frac{du}{1 - u^2} = \int_0^{\sin x} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

Ainsi **une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ est** $x \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

Point de méthode : pour une puissance impaire de sinus ou de cosinus, on isole un facteur et on écrit le reste en fonction de l'autre fonction. Pour une puissance paire, en revanche, on linéarise par les formules d'Euler.

Corrigé de l'exercice 14 : Le changement de variable $t = \tan(x/2)$

1. Pour $x \in]-\pi, \pi[$, on a $\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos \frac{x}{2} \neq 0$. Ensuite,
 $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} (1 - t^2)$. Or $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1}{1 + t^2}$. Donc
 $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

2. La fonction $\varphi : t \rightarrow 2 \arctan t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec $\varphi(0) = 0$ et
 $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$. De plus, la fonction $x \rightarrow \frac{1}{2 + \cos x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $2 + \cos x \geq 1$.
Le théorème de changement de variable s'applique donc, avec $dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$.

3. On a $2 + \cos \varphi(t) = \frac{2(1 + t^2) + 1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{3 + t^2}{1 + t^2}$. Par conséquent,

$$I = \int_0^1 \frac{1 + t^2}{3 + t^2} \cdot \frac{2 dt}{1 + t^2} = \int_0^1 \frac{2 dt}{3 + t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Finalement, $I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Point de méthode : le changement $t = \tan \frac{x}{2}$ transforme toute fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$ en fraction rationnelle en t . On retombe alors souvent sur une primitive de $\frac{1}{at^2 + bt + c}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Fonctions hyperboliques

1. On a $\operatorname{ch}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{\operatorname{ch}(2x) + 1}{2}$. Donc

$$\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x \, dx = \left[\frac{\operatorname{sh}(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{\operatorname{sh} 2}{4} + \frac{1}{2}.$$

L'intégrale vaut $\frac{\text{sh } 2}{4} + \frac{1}{2}$.

2. La fonction $x \rightarrow 2\arctan(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{2e^x}{1+e^{2x}}$. En divisant numérateur et dénominateur par e^x , on obtient $\frac{2}{e^{-x}+e^x} = \frac{1}{\text{ch } x}$. Ainsi $2\arctan(e^x)$ **est bien une primitive de** $\frac{1}{\text{ch } x}$.

3. On a $e^a = 1 + \sqrt{2}$ et $e^{-a} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$, en multipliant par la quantité conjuguée. Donc $\text{sh } a = \frac{(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1)}{2}$ et $\text{ch } a = \frac{(1+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)}{2}$. Ainsi $\text{sh } a = 1$ **et** $\text{ch } a = \sqrt{2}$.

4. On pose $x = \text{sh } t$ avec $t \in [0, a]$. La fonction sh est $\mathcal{C}^1$, $\text{sh } 0 = 0$, $\text{sh } a = 1$, et $dx = \text{ch } t dt$. De plus, $\sqrt{1 + \text{sh}^2 t} = \text{ch } t$, car $\text{ch } t > 0$. Donc, d'après la question 1,

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^a \text{ch}^2 t dt = \frac{\text{sh}(2a)}{4} + \frac{a}{2} = \frac{\text{sh } a \text{ch } a}{2} + \frac{a}{2}.$$

Finalement, l'intégrale vaut $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}$, soit environ 1,148.

Point de méthode : le changement $x = \text{sh } t$ fait disparaître la racine $\sqrt{1+x^2}$, de même que $x = \sin t$ fait disparaître $\sqrt{1-x^2}$. Dans les deux cas, on utilise la relation fondamentale entre les deux fonctions.

Corrigé de l'exercice 16 : Primitives à valeurs complexes

1. Pour x réel, $x - \alpha = (x - a) - ib$ n'est jamais nul, car $b \neq 0$. On multiplie par le conjugué : $\frac{1}{x - \alpha} = \frac{(x - a) + ib}{(x - a)^2 + b^2}$. Ainsi $u(x) = \frac{x - a}{(x - a)^2 + b^2}$ **et** $v(x) = \frac{b}{(x - a)^2 + b^2}$.

2. D'abord, u est de la forme $\frac{1}{2} \frac{w'}{w}$ avec $w(x) = (x - a)^2 + b^2 > 0$. Une primitive de u est donc $\frac{1}{2} \ln((x - a)^2 + b^2) = \ln|x - \alpha|$. Ensuite, $\left(\arctan \frac{x - a}{b}\right)' = \frac{1/b}{1 + (x - a)^2/b^2} = \frac{b}{b^2 + (x - a)^2} = v(x)$. Comme une primitive de $u + iv$ s'obtient composante par composante, $x \rightarrow \ln|x - \alpha| + i \arctan \frac{x - a}{b}$ **est une**

primitive de $\frac{1}{x-\alpha}$.

3. On a $\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} = \frac{(x+i) - (x-i)}{x^2+1} = \frac{2i}{x^2+1}$, d'où l'égalité annoncée. Pour $\alpha = i$ ($a = 0, b = 1$), une primitive de $\frac{1}{x-i}$ est $\ln|x-i| + i \arctan x$. Pour $\alpha = -i$ ($a = 0, b = -1$), c'est $\ln|x+i| - i \arctan x$. Or $|x-i| = |x+i| = \sqrt{x^2+1}$. La différence vaut donc $2i \arctan x$. En divisant par $2i$, on retrouve **la primitive** $\arctan x$ de $\frac{1}{1+x^2}$.
4. La fonction $\ln$ n'est définie que sur $]0, +\infty[$; il n'existe pas, dans ce programme, de logarithme d'un nombre complexe. De plus, la formule $(\ln|w|)' = \frac{w'}{w}$ n'est valable que pour w réelle. Pour w complexe, $\ln|w|$ ne fournit que la partie réelle. **La partie imaginaire** $i \arctan \frac{x-a}{b}$ **est indispensable**.

Corrigé de l'exercice 17 : Une suite d'intégrales de fractions

1. On a $J_1 = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
2. Posons $u(x) = (1+x^2)^{-n}$ et $v'(x) = 1$. Ces fonctions sont $\mathcal{C}^1$, avec $u'(x) = -2nx(1+x^2)^{-n-1}$ et $v(x) = x$. Alors

$$J_n = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

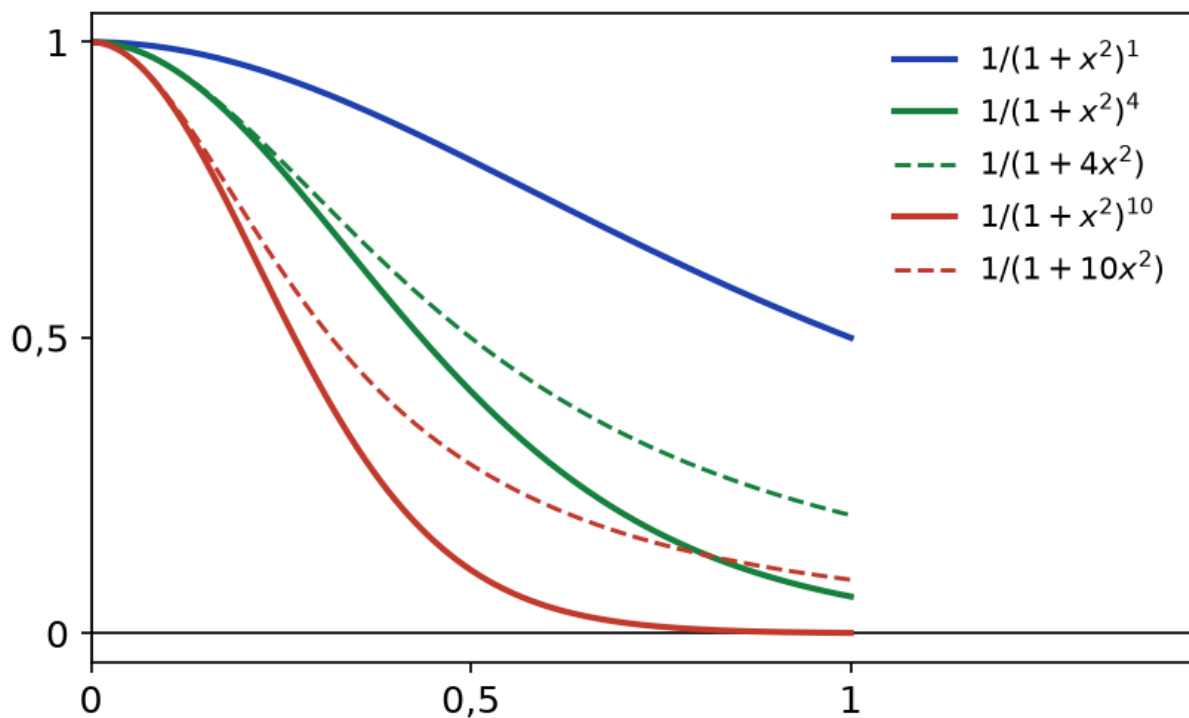
Or $x^2 = (1+x^2) - 1$, donc la dernière intégrale vaut $J_n - J_{n+1}$. Ainsi $J_n = \frac{1}{2^n} + 2n(J_n - J_{n+1})$. En regroupant, $2nJ_{n+1} = (2n-1)J_n + \frac{1}{2^n}$.

3. Pour $n = 1$: $2J_2 = J_1 + \frac{1}{2}$, donc $J_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. Pour $n = 2$: $4J_3 = 3J_2 + \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$. Donc $J_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$.
4. Raisonnons par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, il y a égalité. Supposons l'inégalité vraie au rang n . Comme $1+x^2 > 0$, on a $(1+x^2)^{n+1} \geq (1+nx^2)(1+x^2) = 1 + (n+1)x^2 + nx^4$. Ce dernier terme est au moins $1 + (n+1)x^2$. Donc $(1+x^2)^{n+1} \geq 1 + nx^2$ **pour tout** $n \geq 1$.

5. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc $0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{1+nx^2}$ sur $[0, 1]$. Par croissance de l'intégrale, puis par la formule de l'arctangente avec $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$0 \leq J_n \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+nx^2} = \frac{\arctan \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

Par le théorème des gendarmes, $J_n \rightarrow 0$. La figure ci-dessous compare les deux familles de courbes.



Point de méthode : pour montrer qu'une suite d'intégrales tend vers 0, cherchez un majorant simple de l'intégrande dont l'intégrale se calcule explicitement. Ici, l'inégalité de Bernoulli ramène le calcul à une arctangente.

Corrigé de l'exercice 18 : Problème, intégrales des puissances

de la tangente

1. On a $I_0 = \frac{\pi}{4}$. Ensuite, $-\ln(\cos x)$ est une primitive de $\tan$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Donc

$$I_1 = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \ln 2. \text{ Ainsi } I_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } I_1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

2. Par linéarité, $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx$. On reconnaît $u' u^n$ avec

$$u = \tan, \text{ de primitive } \frac{\tan^{n+1} x}{n+1}. \text{ Comme } \tan \frac{\pi}{4} = 1, \quad I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

3. Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a $0 \leq \tan x \leq 1$. Donc $\tan^n x \geq 0$ et $\tan^{n+1} x \leq \tan^n x$. Par positivité et croissance de l'intégrale, $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$. La figure de l'énoncé illustre cet écrasement des courbes vers 0.

4. Soit $n \geq 2$. D'une part, $I_{n+2} \leq I_n$, donc $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} \leq 2I_n$. D'autre part, $I_n \leq I_{n-2}$, donc $2I_n \leq I_{n-2} + I_n = \frac{1}{n-1}$. Ainsi $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$. Par le théorème des gendarmes, $I_n \rightarrow 0$.

5. La fonction $\arctan$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec $\arctan 0 = 0$ et $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. On pose $x = \arctan u$, donc $dx = \frac{du}{1+u^2}$ et $\tan x = u$. Par conséquent,

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du.$$

6. Posons $a_k = (-1)^k I_{2k}$. La relation de la question 2, avec $n = 2k$, donne

$$I_{2k+2} = \frac{1}{2k+1} - I_{2k}. \text{ En multipliant par } (-1)^{k+1}, \text{ on obtient } a_{k+1} = a_k - \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

En sommant ces égalités pour k de 0 à $n-1$, la somme télescope :

$$a_n = a_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - S_n.$$

Ainsi $(-1)^n I_{2n} = \frac{\pi}{4} - S_n$. Or $|(-1)^n I_{2n}| = I_{2n} \rightarrow 0$. Donc $S_n \rightarrow \frac{\pi}{4}$.

7. De même, posons $b_k = (-1)^k I_{2k+1}$. La relation avec $n = 2k-1$ donne

$$I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - I_{2k-1} \text{ pour } k \geq 1. \text{ Donc } b_k = b_{k-1} + \frac{(-1)^k}{2k}.$$

En sommant de $k=1$ à n :

$$(-1)^n I_{2n+1} = \frac{\ln 2}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}.$$

Comme $I_{2n+1} \rightarrow 0$, on obtient $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \rightarrow \frac{\ln 2}{2}$. En multipliant par 2, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \rightarrow \ln 2$.

Point de méthode : une relation de récurrence entre intégrales, jointe à une majoration qui tend vers 0, permet d'obtenir la limite de sommes alternées. Cette démarche revient souvent aux concours.

Corrigé de l'exercice 19 : Une intégrale de concours

1. La fonction $\tan$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, avec $\tan 0 = 0$ et $\tan \frac{\pi}{4} = 1$. De plus, $x \rightarrow \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. On pose $x = \tan t$, donc $dx = (1 + \tan^2 t) dt$. Le facteur $1 + \tan^2 t$ se simplifie avec le dénominateur. Ainsi

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt.$$

2. Pour $u \in [0, \frac{\pi}{4}]$, la formule d'addition donne $\tan(\frac{\pi}{4} - u) = \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}$. Donc $1 + \tan(\frac{\pi}{4} - u) = \frac{(1 + \tan u) + (1 - \tan u)}{1 + \tan u}$, soit $\frac{2}{1 + \tan u}$.

3. On pose $t = \frac{\pi}{4} - u$, avec $dt = -du$; les bornes s'échangent. D'après la question 2 :

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1 + \tan u} du = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan u) du = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I.$$

Par conséquent, $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$, soit environ 0,272.

Point de méthode : une intégrale que l'on ne sait pas primitiver peut parfois se calculer par symétrie. Le

changement de variable fait réapparaître la même intégrale avec un signe opposé, et l'on résout une équation du premier degré.

Corrigé de l'exercice 20 : Intégrales à bornes variables

1. La fonction $f : t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est dérivable à valeurs dans cet intervalle. D'après la formule du cours,

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-\ln x}{1+1/x^2} = \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{x^2+1} = 0.$$

Ainsi F est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Comme $F(1) = 0$, F est nulle sur $]0, +\infty[$.

2. Fixons $x > 0$ et posons $t = \frac{1}{u}$, qui est $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités x et $\frac{1}{x}$. Alors $dt = -\frac{du}{u^2}$, $\ln t = -\ln u$ et $1+t^2 = \frac{u^2+1}{u^2}$. Les bornes $\frac{1}{x}$ et x deviennent x et $\frac{1}{x}$. Donc

$$F(x) = \int_x^{1/x} \frac{-\ln u \cdot u^2}{1+u^2} \cdot \frac{-du}{u^2} = \int_x^{1/x} \frac{\ln u}{1+u^2} du = -F(x).$$

Par conséquent, $F(x) = 0$.

3. La fonction $g : t \rightarrow \frac{\arctan t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De même,

$$G'(x) = g(x) + \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot x \arctan \frac{1}{x}.$$

Ainsi $G'(x) = \frac{\arctan x + \arctan(1/x)}{x}$.

4. Pour $x > 0$, on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Donc $G'(x) = \frac{\pi}{2x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Il existe alors une constante C telle que $G(x) = \frac{\pi}{2} \ln x + C$. Or $G(1) = 0$, donc $C = 0$. Finalement, $G(x) = \frac{\pi}{2} \ln x$.

Point de méthode : pour calculer une intégrale à bornes variables sans primitive explicite, dérivez-la puis déterminez la constante en un point simple, souvent là où les bornes coïncident.

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [calcul de primitives, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur calcul de primitives](#)
- À maîtriser avant : [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Chapitre précédent : [Fonctions usuelles et techniques de dérivation](#)
- Chapitre suivant : [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)