

Bases et dimension

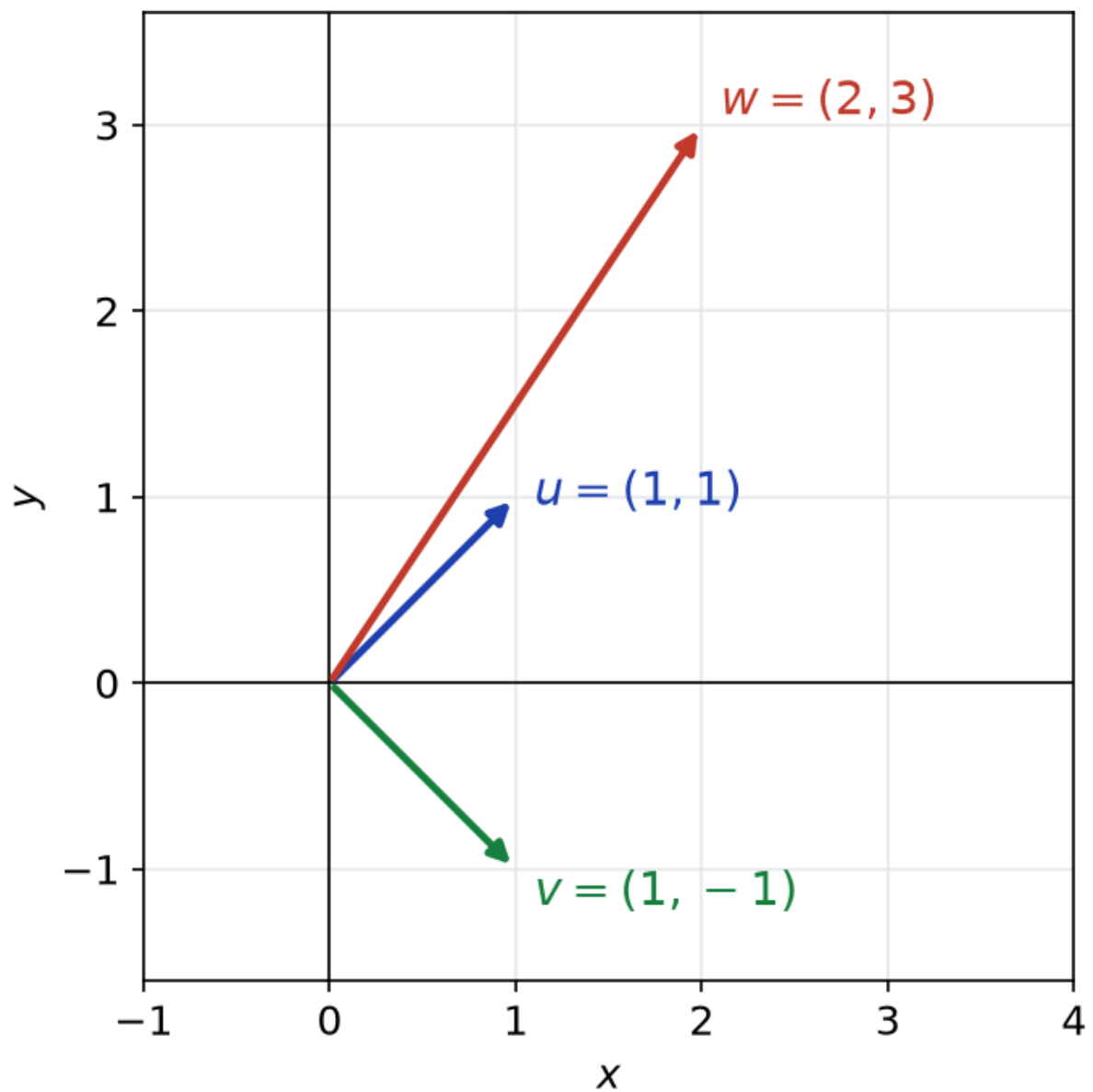
Exercice 1 : Familles libres ou liées dans l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (0, 3, -3)$ et $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre.
2. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée et donner une relation de dépendance linéaire.
3. Montrer que $(u_1, u_2, \varepsilon_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner les coordonnées de u_3 dans cette base.

Exercice 2 : Famille génératrice du plan et extraction de bases

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$ et $w = (2, 3)$. La figure ci-dessous représente ces trois vecteurs.



1. Montrer que (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$ en écrivant tout (x, y) comme combinaison de u et v .
2. En déduire que (u, v, w) est génératrice et liée. Écrire w en fonction de u et v .
3. Déterminer toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ que l'on peut extraire de (u, v, w) .
4. Donner les coordonnées du vecteur $(4, 2)$ dans la base (u, v) .

Exercice 3 : Coordonnées dans une base de l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur quelconque (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire les coordonnées de $w = (3, -1, 2)$ et de $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 4 : Base de Taylor des polynômes de degré au plus 2

On travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $P = X^2 + 3X + 1$ dans $\mathcal{B}$.
3. Plus généralement, exprimer les coordonnées de $P = a + bX + cX^2$ dans $\mathcal{B}$ à l'aide de $P(1)$, $P'(1)$ et $P''(1)$.

Exercice 5 : Dimensions de référence

Donner une base et la dimension de chacun des espaces suivants, en justifiant brièvement.

1. $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_4[X]$.
2. $\mathbb{C}^3$, vu comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel puis comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
3. Le sous-espace des polynômes pairs de $\mathbb{R}_4[X]$, c'est-à-dire tels que $P(-X) = P(X)$.
4. Le sous-espace des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

Exercice 6 : Vrai ou faux sur les familles de vecteurs

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier par une preuve ou par un contre-exemple.

1. Si (u, v) et (v, w) sont libres, alors (u, v, w) est libre.
2. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
3. Si (u, v, w) est liée, alors $w \in \text{Vect}(u, v)$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de quatre vecteurs est toujours liée.
5. Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs deux à deux non colinéaires forment une base.
6. Si F et G sont deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$, alors $\dim(F + G) = 4$.

Exercice 7 : Familles de fonctions

On se place dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre.
2. Montrer que la famille $(1, \cos^2, \sin^2)$ est liée.
3. On note $c_2 : x \rightarrow \cos(2x)$. Déterminer le rang de la famille $(1, \cos^2, \sin^2, c_2)$ et une base du sous-espace qu'elle engendre.
4. Soit $f : x \rightarrow x$ et $g : x \rightarrow |x|$. Montrer que (f, g) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais que les restrictions de f et g à $[0, +\infty[$ forment une famille liée.

Exercice 8 : Rang d'une famille par la méthode du pivot

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (0, 3, -3, 1)$, $v_4 = (1, -1, 3, 0)$, et l'on note $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1. Déterminer le rang de (v_1, v_2, v_3, v_4) par la méthode du pivot et en déduire deux relations de dépendance linéaire.
2. Donner une base et la dimension de F .
3. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de vecteurs de la base canonique.
4. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 3t = 0 \text{ et } -3x + z + 3t = 0\}$.

Exercice 9 : Famille dépendant d'un paramètre

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 1, a)$, $u_2 = (1, a, 1)$ et $u_3 = (a, 1, 1)$.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour $a = 1$, donner le rang de la famille et décrire $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
3. Pour $a = -2$, donner le rang, une relation de dépendance et une équation de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Exercice 10 : Base d'un sous-espace défini par des équations

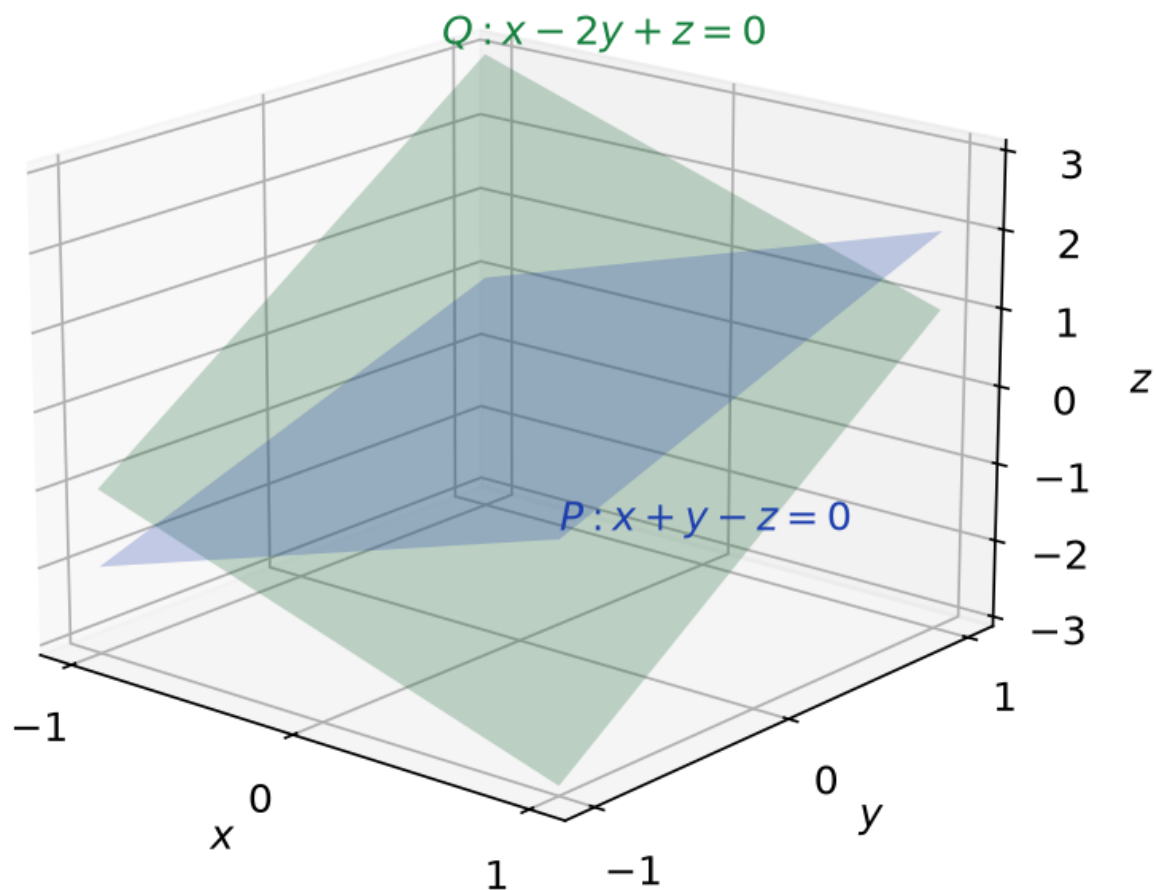
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$.

1. Déterminer une base et la dimension de F .
2. Compléter la base obtenue en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de $\epsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $\epsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$.

3. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11 : Intersection de deux plans de l'espace

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les plans P d'équation $x + y - z = 0$ et Q d'équation $x - 2y + z = 0$. La figure ci-dessous les représente.



1. Donner une base de P et une base de Q .
2. Déterminer $P \cap Q$ et sa dimension.

- À l'aide de la formule de Grassmann, déterminer $P + Q$. La somme est-elle directe ?
- Construire une base (w, p, q) de $\mathbb{R}^3$ telle que (w, p) soit une base de P et (w, q) une base de Q .

Exercice 12 : Somme et intersection dans un espace de dimension 4

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0)$, $F = \text{Vect}(a_1, a_2)$ et

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0, \text{ et } x - t = 0\}.$$

- Donner la dimension de F , puis une base et la dimension de G .
- Déterminer une base de $F \cap G$.
- En déduire $\dim(F + G)$ et une base de $F + G$.
- Montrer que $F + G$ est l'hyperplan d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 13 : Sous-espaces supplémentaires de dimension 2

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$, $w_1 = (1, 0, 1, 2)$, $w_2 = (1, 1, 0, 0)$, puis $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(w_1, w_2)$.

- Justifier que F et G sont de dimension 2.
- Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
- En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
- Décomposer $s = (1, 1, 1, 1)$ sous la forme $s = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Exercice 14 : Matrices symétriques et antisymétriques

Soit $n \geq 1$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $M^T = M$, et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques, telles que $M^T = -M$. On admet que ce sont des sous-espaces vectoriels.

1. À l'aide des matrices élémentaires E_{ij} , donner une base de $\mathcal{S}_n$ et montrer que $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. De même, montrer que $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$, puis que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Décomposer $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 15 : Formule de Grassmann dans un espace de polynômes

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $F = \{P \in E : P(1) = P(-1) = 0\}$ et $G = \{P \in E : P(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est l'ensemble des $(X^2 - 1)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_1[X]$. En déduire une base et la dimension de F .
2. Donner une base et la dimension de G .
3. Déterminer $F \cap G$.
4. En déduire $F + G$. La somme est-elle directe ?

Exercice 16 : Égalité de sous-espaces par la dimension

1. Soit $F \subset G$ deux sous-espaces de dimension finie d'un même espace, avec $\dim F = \dim G$. Démontrer que $F = G$ à l'aide d'une base de F .
2. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $\text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)) = \text{Vect}((1, 2, 1), (1, 0, -1))$.
3. Montrer que $(X^2, (X-1)^2, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 17 : Familles de polynômes échelonnées

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $(P_0, \dots, P_n)$ des polynômes tels que $\deg P_k = k$ pour tout k . Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $S_k = 1 + X + \dots + X^k$. Montrer que $(S_0, \dots, S_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner les coordonnées de X^k dans cette base.
3. On pose $Q_k = X^k (1-X)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$. Ces polynômes sont tous de degré n . Montrer pourtant que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner les coordonnées du polynôme constant 1 dans la base $(Q_0, \dots, Q_n)$.

Exercice 18 : Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Soit E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

2. Soit a et b les éléments de E tels que $(a_0, a_1) = (1, 0)$ et $(b_0, b_1) = (0, 1)$. Montrer que (a, b) est une base de E . Que vaut $\dim E$?
3. Déterminer les réels r tels que la suite (r^n) appartienne à E . En déduire une autre base de E .
4. Exprimer le terme général de la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

Exercice 19 : Intersection de sous-espaces en dimension n

Soit E un espace de dimension $n \geq 1$ et F, G deux sous-espaces de E .

1. Montrer que $\dim(F \cap G) \geq \dim F + \dim G - n$.
2. En déduire que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.
3. Un hyperplan de E est un sous-espace de dimension $n - 1$. Montrer par récurrence que l'intersection de p hyperplans $H_1, \dots, H_p$ est de dimension au moins $n - p$.
4. Dans $\mathbb{R}^5$, on pose $F = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et $G = \text{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$, où (ε_i) est la base canonique. Calculer $F \cap G$ et comparer à la minoration de la question 1.
5. Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ peuvent-ils avoir une intersection réduite à $\{0\}$? Et dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 20 : Familles d'exponentielles et dimension infinie

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f_\lambda : x \rightarrow e^{\lambda x}$, élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ des réels distincts. Montrer que $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_p})$ est libre. On pourra considérer le plus grand indice m dont le coefficient est non nul et diviser par $e^{\lambda_m x}$.
2. En déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

- Montrer que $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \text{Vect}(f_1, f_{-1})$ et donner sa dimension.
- La famille $(x \rightarrow e^x, x \rightarrow e^{x+1})$ est-elle libre ?

Exercice 21 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $0 \leq i \leq n$, on pose

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

- Calculer $L_i(a_j)$ pour tous i, j .
- Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Montrer que les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont $P(a_0), \dots, P(a_n)$. En déduire $L_0 + \dots + L_n$.
- Application : $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Calculer L_0 , L_1 , L_2 , puis vérifier la décomposition de $P = X^2 + X + 1$.

Exercice 22 : Problème : commutant d'une matrice carrée d'ordre 2

Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle commutant de A l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AM = MA\}$. On note I la matrice identité,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $\mathcal{S}$ celui des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour toute matrice A , et qu'il

contient I et A .

2. Pour la matrice A ci-dessus, montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I, N)$ et donner sa dimension.
3. Donner une base de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{S}$. Déterminer $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, puis $\mathcal{S} + \mathcal{T}$. La somme est-elle directe ?
4. Déterminer $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{S}$ et $\mathcal{C}(A) + \mathcal{S}$.
5. Montrer que $\mathcal{C}(B) = \text{Vect}(I, B)$.
6. Déterminer $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$, puis la dimension et une base de $\mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [bases et dimension, cours de maths en L1](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur bases et dimension](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels](#)
- Chapitre précédent : [Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels](#)
- Chapitre suivant : [Applications linéaires](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)

