

Bases et dimension

Corrigé de l'exercice 1 : Familles libres ou liées dans l'espace

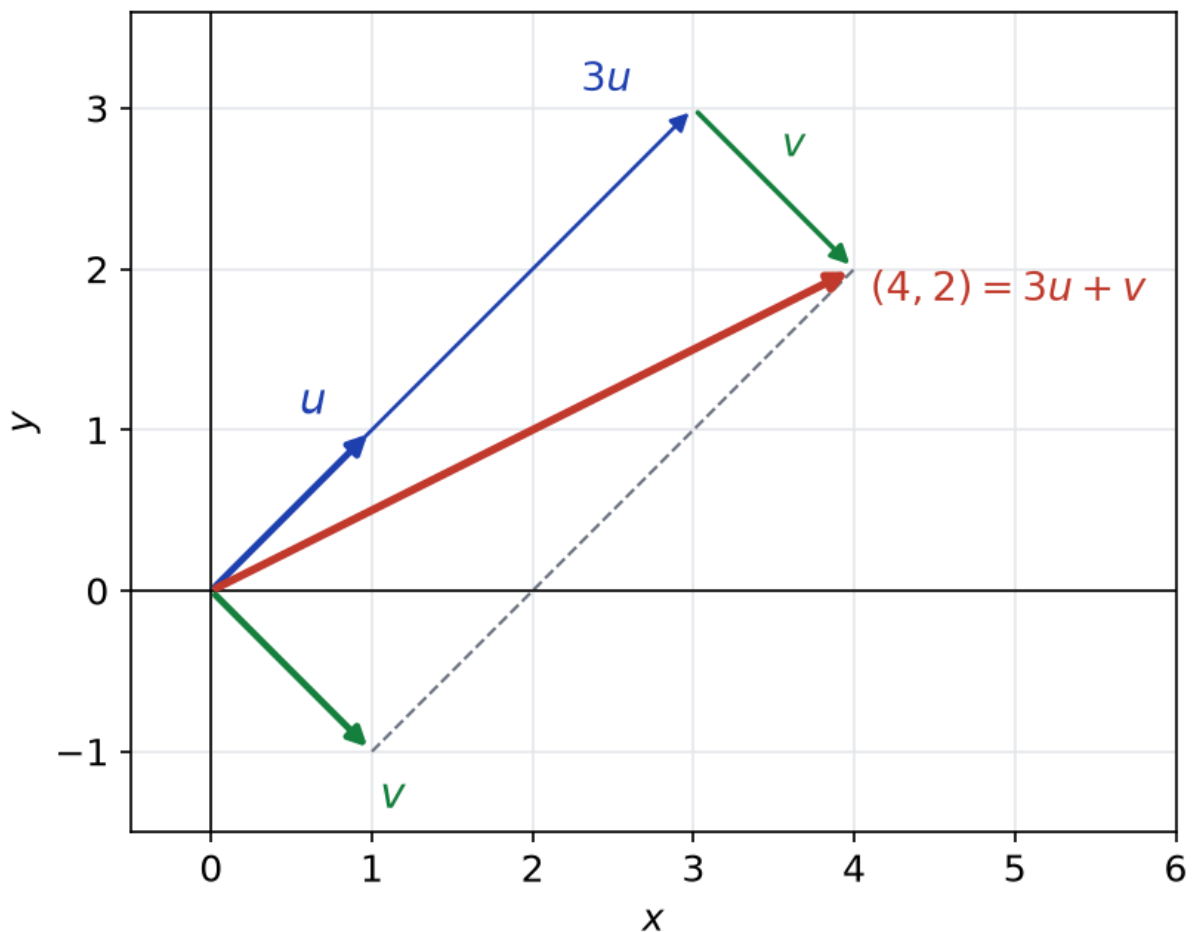
1. Soit $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$. La première composante donne $\alpha + 2\beta = 0$ et la troisième donne $-\alpha + \beta = 0$. Ainsi $\alpha = \beta$, puis $3\beta = 0$. Donc $\alpha = \beta = 0$. **La famille (u_1, u_2) est libre.**
2. On remarque que $2u_1 - u_2 = (2 - 2, 4 - 1, -2 - 1) = (0, 3, -3) = u_3$. Par conséquent, $2u_1 - u_2 - u_3 = 0$ est une relation non triviale. **La famille est liée, avec $u_3 = 2u_1 - u_2$.**
3. Soit $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_1 = 0$. La troisième composante donne $-\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = \alpha$. Ensuite, la deuxième donne $2\alpha + \beta = 3\alpha = 0$. Ainsi $\alpha = \beta = 0$, et la première composante donne enfin $\gamma = 0$. La famille est donc libre. Or elle compte trois vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. **C'est une base de $\mathbb{R}^3$.**
4. D'après la question 2, $u_3 = 2u_1 + (-1)u_2 + 0 e_1$. Par unicité des coordonnées, **les coordonnées de u_3 sont $(2, -1, 0)$.**

Corrigé de l'exercice 2 : Famille génératrice du plan et extraction de bases

1. On cherche a et b tels que $au + bv = (x, y)$, c'est-à-dire $a + b = x$ et $a - b = y$. En additionnant puis en soustrayant, on trouve $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$. Ainsi $(x, y) = \frac{x+y}{2}u + \frac{x-y}{2}v$, **donc (u, v) engendre $\mathbb{R}^2$.**
2. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice, donc (u, v, w) l'est. De plus, trois

vecteurs dans un espace de dimension 2 forment toujours une famille liée. Explicitement, la formule précédente avec $(x,y) = (2,3)$ donne $w = \frac{5}{2}u - \frac{1}{2}v$.

3. Une base de $\mathbb{R}^2$ a exactement deux vecteurs. Il suffit donc de tester les paires. Deux vecteurs (a,b) et (c,d) du plan sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$. Pour (u,v) : $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$. Pour (u,w) : $1 \times 3 - 1 \times 2 = 1$. Pour (v,w) : $1 \times 3 - (-1) \times 2 = 5$. Aucune paire n'est colinéaire, donc chacune est libre. Or deux vecteurs libres en dimension 2 forment une base. **Les trois paires (u,v) , (u,w) et (v,w) sont des bases.**
4. Avec $(x,y) = (4,2)$, on obtient $a = 3$ et $b = 1$. **Les coordonnées de $(4,2)$ dans (u,v) sont $(3,1)$.** La figure ci-dessous montre la construction $3u + v$.



Corrigé de l'exercice 3 : Coordonnées dans une base de l'espace

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche (a, b, c) tel que $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x, y, z)$. Or $av_1 + bv_2 + cv_3 = (a + b + c, b + c, c)$. Le système triangulaire $c = z$, $b + c = y$, $a + b + c = x$ admet une unique solution. D'après la caractérisation des bases par l'unicité de l'écriture, **$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.**
2. En remontant le système, on trouve $c = z$, puis $b = y - z$, enfin $a = x - y$. **Les coordonnées de (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ sont $(x - y, y - z, z)$.**
3. Pour $w = (3, -1, 2)$: $(3 - (-1), -1 - 2, 2) = (4, -3, 2)$. On vérifie que $4v_1 - 3v_2 + 2v_3 = (4 - 3 + 2, -3 + 2, 2) = (3, -1, 2)$. Pour $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$: $(0 - 1, 1 - 0, 0) = (-1, 1, 0)$. **Ainsi w a pour coordonnées $(4, -3, 2)$ et ε_2 a pour coordonnées $(-1, 1, 0)$.**

Corrigé de l'exercice 4 : Base de Taylor des polynômes de degré au plus 2

1. Les polynômes 1 , $X - 1$ et $(X - 1)^2$ sont non nuls, de degrés respectifs 0, 1 et 2. Une famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre. De plus, elle compte 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$. **Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.**
2. On écrit $P = \alpha + \beta(X - 1) + \gamma(X - 1)^2$. Comme $X = (X - 1) + 1$, on a $X^2 = (X - 1)^2 + 2(X - 1) + 1$. Par conséquent
$$P = (X - 1)^2 + 2(X - 1) + 1 + 3(X - 1) + 3 + 1 = (X - 1)^2 + 5(X - 1) + 5.$$
Les coordonnées de P sont $(5, 5, 1)$.
3. Posons $P = \alpha + \beta(X - 1) + \gamma(X - 1)^2$. Alors $P(1) = \alpha$. De plus, $P' = \beta + 2\gamma(X - 1)$ donne $P'(1) = \beta$. Enfin $P'' = 2\gamma$. Donc **les coordonnées sont $\left(P(1), P'(1), \frac{P''(1)}{2}\right) = (a + b + c, b + 2c, c)$** . On retrouve bien $(5, 5, 1)$ pour $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$.

Corrigé de l'exercice 5 : Dimensions de référence

1. La base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est formée des six matrices E_{ij} , pour $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$. De même, $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. **Donc** $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$ **et** $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$.
2. Sur $\mathbb{C}$, la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ convient, d'où la dimension 3. Sur $\mathbb{R}$, écrivons $z_k = x_k + i y_k$ avec x_k, y_k réels. Alors $(z_1, z_2, z_3) = \sum_k x_k \varepsilon_k + \sum_k y_k (i\varepsilon_k)$, et cette écriture est unique car la partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe sont uniques. **Donc** $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 = 3$, **et** $(\varepsilon_1, i\varepsilon_1, \varepsilon_2, i\varepsilon_2, \varepsilon_3, i\varepsilon_3)$ **est une base réelle** : $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3 = 6$.
3. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$. Alors $P(-X) - P(X) = -2bX - 2dX^3$. Ainsi P est pair si et seulement si $b = d = 0$. Les polynômes pairs sont donc les $a + cX^2 + eX^4$. La famille $(1, X^2, X^4)$ est génératrice, et libre comme sous-famille de la base canonique. **La dimension vaut 3, de base** $(1, X^2, X^4)$.
4. Une matrice de trace nulle s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}$. La famille $(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21})$ est donc génératrice. Elle est libre : si la combinaison est nulle, la matrice obtenue a pour coefficients a, b, c , qui sont donc nuls. **La dimension vaut 3.**

Corrigé de l'exercice 6 : Vrai ou faux sur les familles de vecteurs

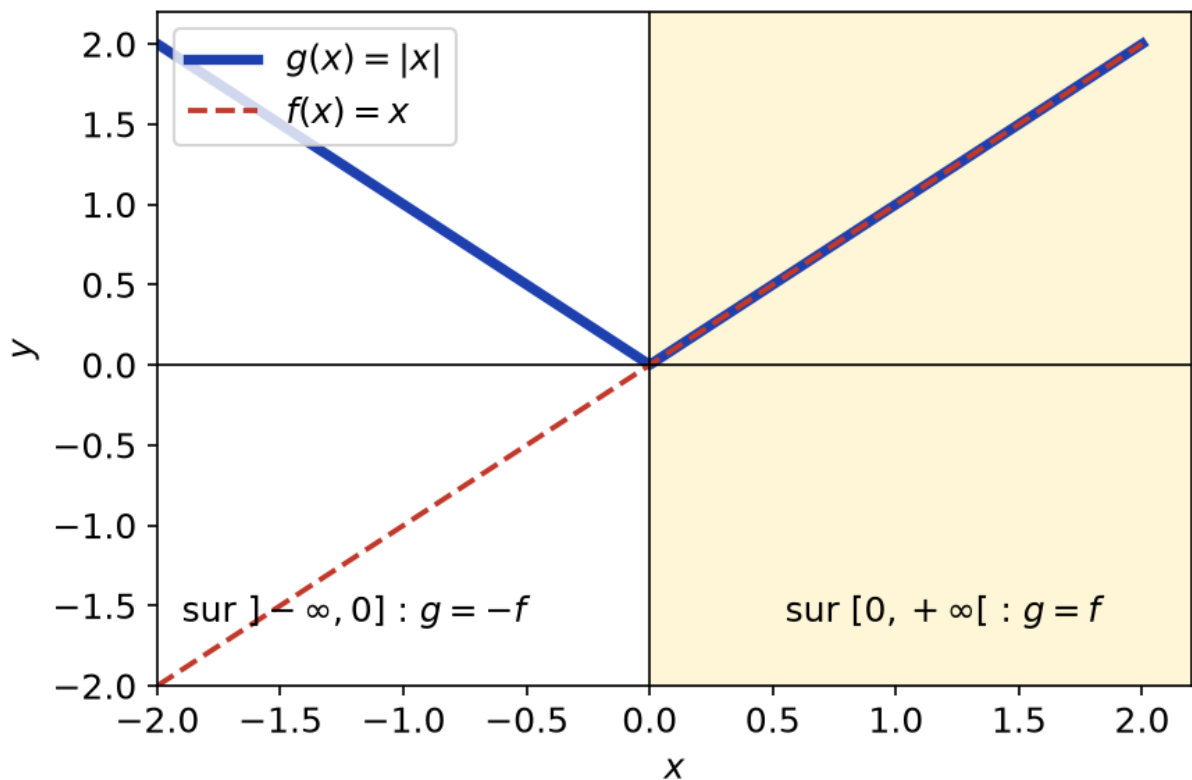
1. **Faux.** Dans $\mathbb{R}^2$, prenons $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $w = (1, 1)$. Les paires (u, v) et (v, w) sont libres, car non colinéaires. En revanche, $w = u + v$, donc (u, v, w) est liée.
2. **Vrai.** Une relation non triviale dans la sous-famille, complétée par des coefficients nuls, serait une relation non triviale dans la famille entière. Or celle-ci est libre.
3. **Faux.** Dans $\mathbb{R}^3$, prenons $u = (1, 0, 0)$, $v = (2, 0, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$. La relation $2u - v = 0$ montre que la famille est liée. Pourtant $w \notin \text{Vect}(u, v)$, qui est l'axe des

abscisses. Le bon énoncé est : si (u, v) est libre et (u, v, w) liée, alors $w \in \text{Vect}(u, v)$.

4. **Vrai.** Une famille libre de $\mathbb{R}^3$ a au plus $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ éléments.
5. **Faux.** Les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(1, 1, 0)$ sont deux à deux non colinéaires. Cependant, le troisième est la somme des deux premiers : la famille est liée.
6. **Faux.** Si $F = G$, alors $F + G = F$ est de dimension 2. D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = 4 - \dim(F \cap G)$ vaut 4 seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Familles de fonctions

1. Supposons $a \cos x + b \sin x = 0$, c'est-à-dire $a \cos x + b \sin x = 0$ pour tout réel x . En $x = 0$, on obtient $a = 0$. En $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $b = 0$. **Donc $(\cos, \sin)$ est libre.**
2. Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Ainsi $1 - \cos^2 - \sin^2 = 0$, avec des coefficients non tous nuls. **La famille $(1, \cos^2, \sin^2)$ est liée.**
3. On a $1 = \cos^2 + \sin^2$ et $c_2 = \cos^2 - \sin^2$. Donc $\text{Vect}(1, \cos^2, \sin^2, c_2) = \text{Vect}(\cos^2, \sin^2)$. Montrons que $(\cos^2, \sin^2)$ est libre. Si $\alpha \cos^2 + \beta \sin^2 = 0$, l'évaluation en 0 donne $\alpha = 0$, puis celle en $\frac{\pi}{2}$ donne $\beta = 0$. **Le rang vaut 2, et $(\cos^2, \sin^2)$ est une base du sous-espace engendré.**
4. Soit $\alpha f + \beta g = 0$. En $x = 1$, on obtient $\alpha + \beta = 0$. En $x = -1$, on obtient $-\alpha + \beta = 0$. Donc $\alpha = \beta = 0$ et (f, g) est libre. En revanche, sur $[0, +\infty[$, on a $|x| = x$. Les restrictions vérifient donc $g - f = 0$: **elles forment une famille liée.**
Comme le montre la figure ci-dessous, les deux courbes coïncident sur la zone colorée.



Point de méthode : la liberté d'une famille de fonctions dépend de l'ensemble de départ. Il faut toujours préciser l'espace dans lequel on travaille.

Corrigé de l'exercice 8 : Rang d'une famille par la méthode du pivot

1. On écrit les vecteurs en lignes. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ annulent les deux dernières lignes. Il reste deux lignes non nulles échelonnées. **Le rang vaut 2.** La troisième ligne nulle s'écrit

$v_3 + (v_2 - 2v_1) = 0$. La quatrième s'écrit $(v_4 - v_1) - (v_2 - 2v_1) = 0$. **Ainsi**
 $v_3 = 2v_1 - v_2$ **et** $v_4 = v_2 - v_1$.

2. Les relations précédentes montrent que $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$. De plus, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. **Donc (v_1, v_2) est une base de F , et $\dim F = 2$.**
3. Essayons ε_3 et ε_4 . Soit $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma \varepsilon_3 + \delta \varepsilon_4 = 0$. Les deux premières composantes donnent $\alpha + 2\beta = 0$ et $2\alpha + \beta = 0$. On en déduit $\alpha = \beta = 0$, puis $\gamma = \delta = 0$. La famille est libre et compte 4 vecteurs en dimension 4. **Donc $(v_1, v_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.**
4. Notons G l'ensemble défini par les deux équations. D'abord, v_1 vérifie $1 + 2 - 3 = 0$ et $-3 + 0 + 3 = 0$. Ensuite, v_2 vérifie $2 + 1 - 3 = 0$ et $-6 + 3 + 3 = 0$. Donc $F \subset G$. Résolvons maintenant le système : $y = 3t - x$ et $z = 3x - 3t$. Ainsi $(x, y, z, t) = x(1, -1, 3, 0) + t(0, 3, -3, 1)$, avec deux paramètres. Par la méthode des paramètres, $\dim G = 2$. Comme $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, **on conclut que $F = G$.** On remarque d'ailleurs que les deux vecteurs obtenus sont v_4 et v_3 .

Corrigé de l'exercice 9 : Famille dépendant d'un paramètre

1. Soit $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$. Cela s'écrit

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$$

En additionnant les trois équations, on obtient $(a+2)(x+y+z) = 0$. Ensuite, la première moins la deuxième donne $(a-1)(z-y) = 0$. De même, la deuxième moins la troisième donne $(a-1)(y-x) = 0$. Supposons $a \neq 1$ et $a \neq -2$. Alors $x = y = z$, puis $3x = 0$. La famille est donc libre, avec trois vecteurs en dimension 3. **C'est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \notin \{1, -2\}$** , la réciproque résultant des deux questions suivantes.

2. Pour $a = 1$, les trois vecteurs valent $(1, 1, 1)$. **Le rang vaut 1 et $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$.**
3. Pour $a = -2$, on a $u_1 = (1, 1, -2)$, $u_2 = (1, -2, 1)$ et $u_3 = (-2, 1, 1)$. Leur somme est nulle : $u_1 + u_2 + u_3 = 0$. De plus, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc le rang vaut 2. Chaque u_i a une somme de composantes nulle. Donc $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ est inclus dans le plan d'équation $x + y + z = 0$. Les deux sont de dimension 2. **Ainsi $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.**

Corrigé de l'exercice 10 : Base d'un sous-espace défini par des équations

1. La seconde équation donne $x = y - 2z$. En reportant dans la première, on obtient $2y - z + t = 0$, soit $t = -2y + z$. Donc

$$(x, y, z, t) = y(1, 1, 0, -2) + z(-2, 0, 1, 1).$$

Posons $f_1 = (1, 1, 0, -2)$ et $f_2 = (-2, 0, 1, 1)$. Ils engendrent F . De plus, ils sont libres, car seul f_1 a une deuxième composante non nulle et seul f_2 a une troisième composante non nulle. **Ainsi (f_1, f_2) est une base de F et $\dim F = 2$.**

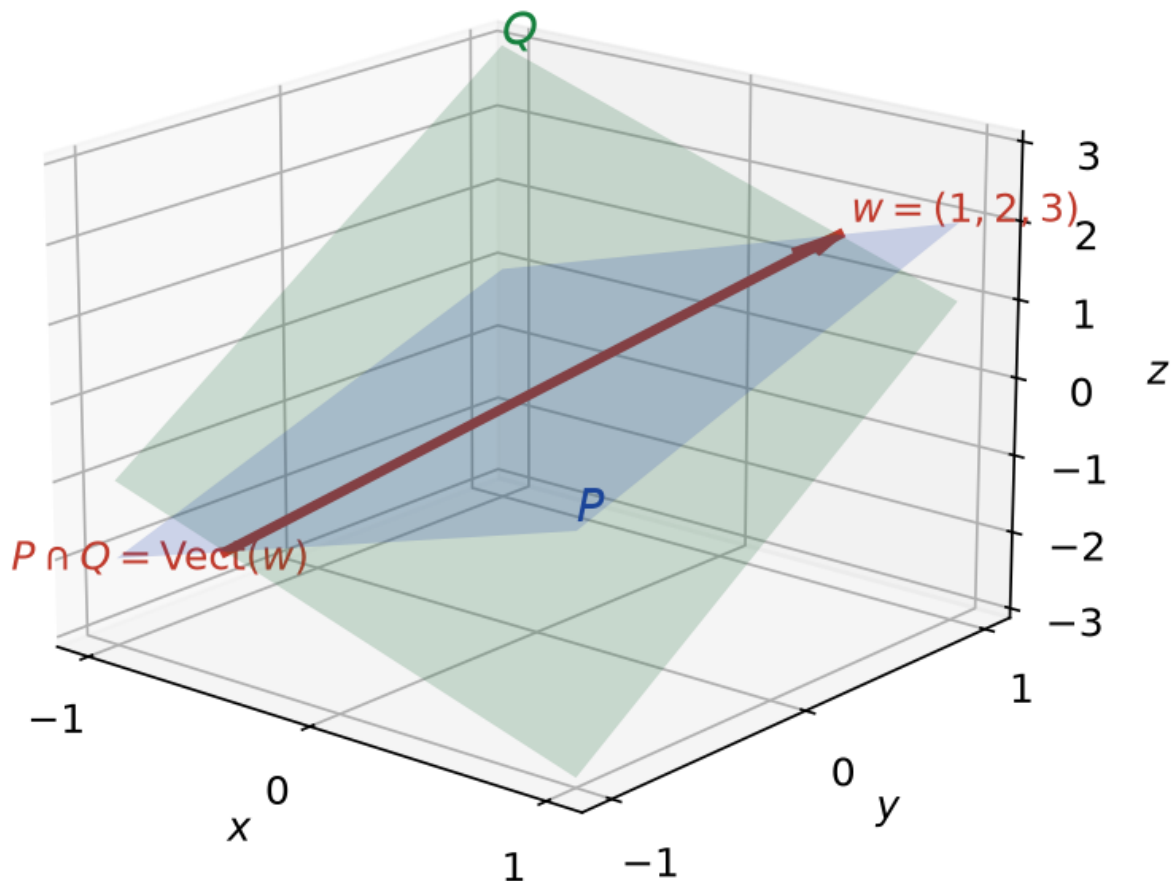
2. Soit $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_2 = 0$. La troisième composante donne $\beta = 0$. La quatrième donne $-2\alpha + \beta = 0$, donc $\alpha = 0$. Il reste $\gamma = \delta = 0$. La famille est libre et compte 4 vecteurs. **Donc $(f_1, f_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.**

3. Posons $G = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique dans la base précédente, donc de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . **Ainsi $F \oplus G = \mathbb{R}^4$: G est un supplémentaire de F .**

Corrigé de l'exercice 11 : Intersection de deux plans de l'espace

1. Dans P , on a $z = x + y$, donc $(x, y, z) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Dans Q , on a $x = 2y - z$, donc $(x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$. **Ainsi $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une base de P et $((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ une base de Q .**
2. On résout $x + y - z = 0$ et $x - 2y + z = 0$. En additionnant, $2x - y = 0$, donc $y = 2x$. Ensuite $z = x + y = 3x$. **Donc $P \cap Q = \text{Vect}(w)$ avec $w = (1, 2, 3)$, de dimension 1.** On vérifie : $1 + 2 - 3 = 0$ et $1 - 4 + 3 = 0$.
3. La formule de Grassmann donne $\dim(P + Q) = 2 + 2 - 1 = 3$. Or $P + Q \subset \mathbb{R}^3$. **Donc $P + Q = \mathbb{R}^3$, mais la somme n'est pas directe car $P \cap Q \neq \{0\}$.**
4. Prenons $p = (1, 0, 1) \in P$ et $q = (2, 1, 0) \in Q$. Soit $aw + bp + cq = 0$. La deuxième composante donne $2a + c = 0$ et la troisième donne $3a + b = 0$. La première donne alors $a + b + 2c = a - 3a - 4a = -6a = 0$. Donc $a = b = c = 0$. La famille

est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, w et p sont deux vecteurs non colinéaires de P , qui est de dimension 2. De même pour w et q dans Q . **La base** $(w, p, q) = ((1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 0))$ **convient**. La figure ci-dessous montre la droite commune aux deux plans.



Corrigé de l'exercice 12 : Somme et intersection dans un espace de dimension 4

1. Les vecteurs a_1 et a_2 ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = 2$. Dans G , on a $t = x$ et $y = x + z$. Donc $(x, y, z, t) = x(1, 1, 0, 1) + z(0, 1, 1, 0)$. Posons $g_1 = (1, 1, 0, 1)$ et

$g_2 = (0, 1, 1, 0)$. Alors (g_1, g_2) est une base de G et $\dim G = 2$.

2. Un vecteur de F s'écrit $v = \alpha a_1 + \beta a_2 = (\alpha, \alpha + \beta, \beta, 0)$. La première équation donne $\alpha - (\alpha + \beta) + \beta = 0$: elle est toujours vérifiée. La seconde donne $\alpha - 0 = 0$. Donc $v = \beta a_2$. Ainsi $F \cap G = \text{Vect}(a_2)$, de dimension 1.
3. Par la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3$. De plus, $F + G = \text{Vect}(a_1, a_2, g_1, g_2) = \text{Vect}(a_1, a_2, g_1)$, car $g_2 = a_2$. Trois vecteurs qui engendrent un espace de dimension 3 en forment une base. Donc (a_1, a_2, g_1) est une base de $F + G$.
4. Soit H l'hyperplan d'équation $x - y + z = 0$. Il s'écrit $x = y - z$, avec trois paramètres y, z, t , donc $\dim H = 3$. Ensuite, a_1, a_2 et g_1 vérifient l'équation : $1 - 1 + 0 = 0$, $0 - 1 + 1 = 0$ et $1 - 1 + 0 = 0$. Ainsi $F + G \subset H$, et les dimensions sont égales. Donc $F + G = H$.

Corrigé de l'exercice 13 : Sous-espaces supplémentaires de dimension 2

1. Si $u_2 = \lambda u_1$, la première composante donne $0 = \lambda$, donc $u_2 = 0$, ce qui est faux. De même, si $w_2 = \lambda w_1$, la quatrième composante donne $0 = 2\lambda$, donc $w_2 = 0$, ce qui est faux. **Les deux familles sont libres, donc** $\dim F = \dim G = 2$. (On vérifie de même que u_1, w_1 ne sont pas multiples de u_2, w_2 .)
2. Soit $v \in F \cap G$. On écrit $v = \alpha u_1 + \beta u_2 = \gamma w_1 + \delta w_2$, soit
$$(\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha + \beta, \beta) = (\gamma + \delta, \delta, \gamma, 2\gamma).$$
La quatrième composante donne $\beta = 2\gamma$. La troisième donne $\alpha = \gamma - \beta = -\gamma$. La première donne $\delta = \alpha - \gamma = -2\gamma$. Enfin, la deuxième donne $2\alpha + \beta = -2\gamma + 2\gamma = 0 = \delta = -2\gamma$. Donc $\gamma = 0$, puis tous les coefficients sont nuls. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
3. La somme $F + G$ est directe et $\dim(F + G) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
4. On résout $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w_1 + \delta w_2 = (1, 1, 1, 1)$:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = 1 \\ 2\alpha + \beta + \delta = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + 2\gamma = 1 \end{cases}$$

La dernière équation donne $\beta = 1 - 2\gamma$, puis la troisième donne $\alpha = \gamma$. Ensuite, la première donne $\delta = 1 - 2\gamma$. En reportant dans la deuxième, $2\gamma + 1 - 2\gamma + 1 - 2\gamma = 1$, d'où $\gamma = \frac{1}{2}$. Ainsi $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \delta = 0$. **Donc** $f = \frac{1}{2}u_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $g = \frac{1}{2}w_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$. On vérifie que $f + g = (1, 1, 1, 1)$.

Corrigé de l'exercice 14 : Matrices symétriques et antisymétriques

1. Une matrice $M = (m_{ij})$ est symétrique si et seulement si $m_{ij} = m_{ji}$ pour tous i, j . Elle s'écrit alors

$$M = \sum_{i=1}^n m_{ii} E_{ii} + \sum_{i < j} m_{ij} (E_{ij} + E_{ji}).$$

La famille formée des E_{ii} et des $E_{ij} + E_{ji}$ pour $i < j$ est donc génératrice de $\mathcal{S}_n$. Elle est libre : une combinaison nulle est une matrice dont les coefficients diagonaux et au-dessus de la diagonale sont exactement les coefficients de la combinaison. Elle compte $n + \frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs.

Donc $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Si M est antisymétrique, $m_{ii} = -m_{ii}$, donc $m_{ii} = 0$. Ainsi $M = \sum_{i < j} m_{ij} (E_{ij} - E_{ji})$. Par le même argument, la famille $(E_{ij} - E_{ji})_{i < j}$ est une base. **Donc** $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Si $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$, alors $M = M^T = -M$, donc $2M = 0$ et $M = 0$. La somme est donc directe. De plus, $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Donc** $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On pose $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. La première est symétrique, la

seconde antisymétrique, et $S + A = M$. On obtient $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 15 : Formule de Grassmann dans un espace de polynômes

- Soit $P \in F$. Les réels 1 et -1 sont racines distinctes de P , donc $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ divise P . On écrit $P = (X^2 - 1)Q$. Comme $\deg P \leq 3$, on a $\deg Q \leq 1$. Réciproquement, un tel polynôme s'annule en 1 et en -1 . Ainsi $F = \{(X^2 - 1)(aX + b)\}$ est engendré par $X^2 - 1$ et $X^3 - X$. Ces polynômes sont de degrés distincts, donc libres. **Ainsi $(X^2 - 1, X^3 - X)$ est une base de F et $\dim F = 2$.**
- Le polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ vérifie $P(0) = a$. Donc $P \in G$ si et seulement si $a = 0$. **La famille (X, X^2, X^3) est une base de G et $\dim G = 3$.**
- Soit $P = a(X^2 - 1) + b(X^3 - X) \in F$. Alors $P(0) = -a$. Donc $P \in G$ si et seulement si $a = 0$. **Ainsi $F \cap G = \text{Vect}(X^3 - X)$, de dimension 1.**
- La formule de Grassmann donne $\dim(F + G) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. **Donc $F + G = \mathbb{R}_3[X]$, et la somme n'est pas directe.**

Corrigé de l'exercice 16 : Égalité de sous-espaces par la dimension

- Soit $p = \dim F = \dim G$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Cette famille est libre et contenue dans G , car $F \subset G$. Or une famille libre de p vecteurs dans un espace de dimension p en est une base. Donc $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$. **Ainsi $F = G$.**
- Notons F_1 et F_2 les deux sous-espaces. On a $(1, 2, 1) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1)$ et $(1, 0, -1) = (1, 1, 0) - (0, 1, 1)$. Donc $F_2 \subset F_1$. Par ailleurs, chacun est engendré par deux vecteurs non colinéaires : $\dim F_1 = \dim F_2 = 2$. **Par la question 1, $F_1 = F_2$.**

3. Soit $aX^2 + b(X-1)^2 + c(X+1)^2 = 0$. En développant, le coefficient de X^2 donne $a + b + c = 0$. Celui de X donne $-2b + 2c = 0$. Le terme constant donne $b + c = 0$. Ainsi $b = c$ et $2b = 0$, donc $b = c = 0$, puis $a = 0$. **La famille est libre, avec 3 vecteurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3 : c'est une base.**

Corrigé de l'exercice 17 : Familles de polynômes échelonnées

1. Supposons $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$ avec des coefficients non tous nuls. Soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Le polynôme $\lambda_m P_m$ est de degré m , tandis que les $\lambda_k P_k$ pour $k < m$ sont de degré au plus $m-1$. La somme est donc de degré m , et non nulle : contradiction. La famille est libre. Elle compte $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension $n+1$. **C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.**
2. Le polynôme S_k est de degré k . Par la question 1, $(S_0, \dots, S_n)$ est une base. De plus, $X^0 = S_0$ et, pour $k \geq 1$, $X^k = S_k - S_{k-1}$. **Les coordonnées de X^k valent donc 1 à la place k , -1 à la place $k-1$ (si $k \geq 1$) et 0 ailleurs.**

3. Supposons $\sum_{k=0}^n \lambda_k Q_k = 0$ avec des coefficients non tous nuls. Soit cette fois m le plus petit indice tel que $\lambda_m \neq 0$. On factorise X^m :

$$X^m \sum_{k=m}^n \lambda_k X^{k-m} (1-X)^{n-k} = 0.$$

Un produit de polynômes non nuls est non nul. Comme $X^m \neq 0$, le polynôme

$R = \sum_{k=m}^n \lambda_k X^{k-m} (1-X)^{n-k}$ est nul. Évaluons-le en 0 : seul le terme $k = m$ ne s'annule pas, donc $R(0) = \lambda_m = 0$. C'est une contradiction. La famille est libre et compte $n+1$ vecteurs. **C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.**

4. Par la formule du binôme de Newton, valable dans l'anneau commutatif $\mathbb{R}[X]$,

$$1 = (X + (1-X))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Les coordonnées de 1 sont donc $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. Pour $n = 2$, on retrouve $1 = (1-X)^2 + 2X(1-X) + X^2$.

Corrigé de l'exercice 18 : Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

1. La suite nulle appartient à E . Soit $u, v \in E$ et λ, μ réels, et posons $w = \lambda u + \mu v$. Pour tout n ,

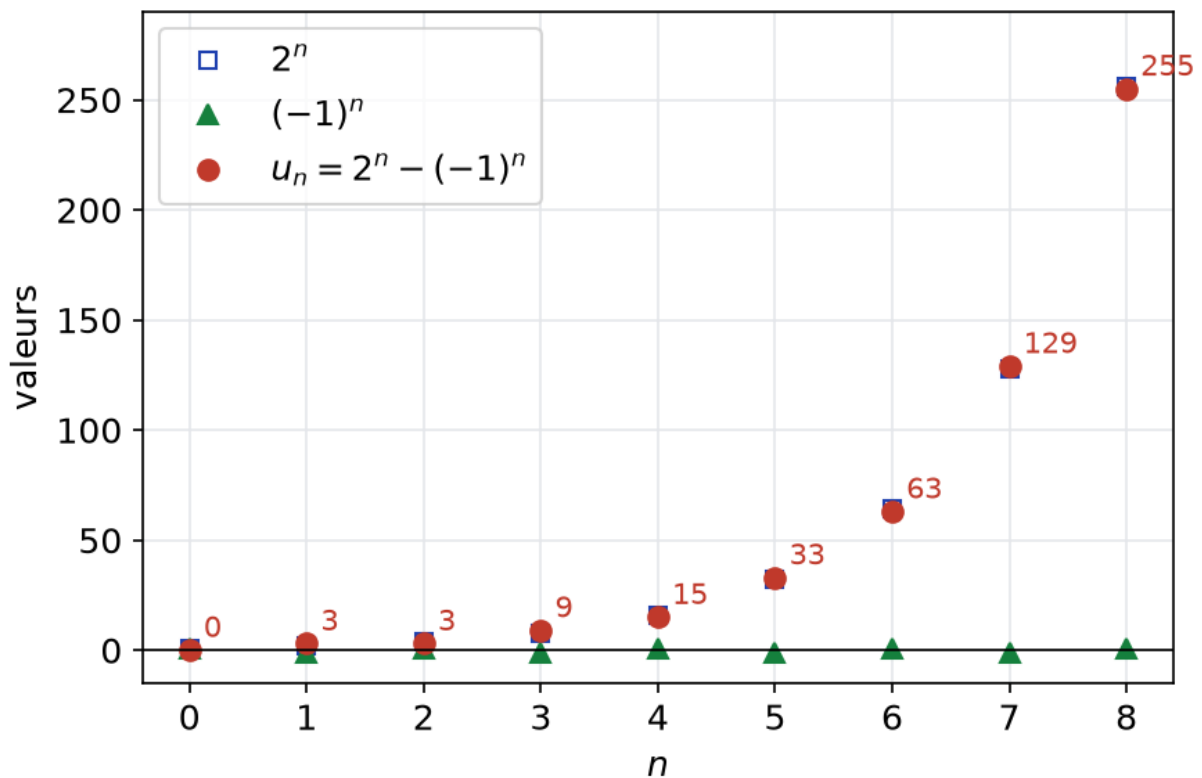
$$w_{n+2} = \lambda(u_{n+1} + 2u_n) + \mu(v_{n+1} + 2v_n) = w_{n+1} + 2w_n.$$

Donc E est un sous-espace vectoriel.

2. Soit $u \in E$ et $v = u - u_0 a - u_1 b$. Alors $v \in E$, avec $v_0 = u_0 - u_0 = 0$ et $v_1 = u_1 - u_1 = 0$. Montrons par récurrence que $v_n = v_{n+1} = 0$ pour tout n . C'est vrai pour $n = 0$. Si $v_n = v_{n+1} = 0$, alors $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n = 0$. Donc $v = 0$, c'est-à-dire $u = u_0 a + u_1 b$: la famille est génératrice. Ensuite, si $\alpha a + \beta b = 0$, le terme d'indice 0 donne $\alpha = 0$ et celui d'indice 1 donne $\beta = 0$. **Donc (a, b) est une base de E et $\dim E = 2$.**

3. Si $(r^n) \in E$, l'égalité au rang $n = 0$ donne $r^2 = r + 2$, soit $(r - 2)(r + 1) = 0$. Réciproquement, si $r^2 = r + 2$, on multiplie par r^n : $r^{n+2} = r^{n+1} + 2r^n$. **Donc $r = 2$ ou $r = -1$.** Montrons que $((2^n), ((-1)^n))$ est libre. Si $\alpha 2^n + \beta (-1)^n = 0$ pour tout n , alors $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$. Deux vecteurs libres dans un espace de dimension 2 forment une base. **Ainsi $((2^n), ((-1)^n))$ est une base de E .**

4. On écrit $u_n = \alpha 2^n + \beta (-1)^n$. Les conditions initiales donnent $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha - \beta = 3$. Donc $3\alpha = 3$, puis $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. **Ainsi $u_n = 2^n - (-1)^n$.** On vérifie : $u_2 = 3 = u_1 + 2u_0$ et $u_3 = 9 = u_2 + 2u_1$. La figure ci-dessous compare u_n aux deux suites de la base.



Point de méthode : pour trouver la dimension d'un espace de solutions, on cherche le nombre de données initiales qui déterminent une solution. Ici, deux valeurs suffisent.

Corrigé de l'exercice 19 : Intersection de sous-espaces en dimension n

1. Le sous-espace $F + G$ est inclus dans E , donc $\dim(F + G) \leq n$. La formule de Grassmann donne alors

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) \geq \dim F + \dim G - n.$$

La minoration est démontrée.

2. Si $\dim F + \dim G > n$, la question 1 donne $\dim(F \cap G) \geq 1$. **Donc $F \cap G$ contient un vecteur non nul.**

3. Notons $K_p = H_1 \cap \dots \cap H_p$. Pour $p = 1$, $\dim K_1 = n - 1$. Supposons $\dim K_p \geq n - p$. Comme $K_{p+1} = K_p \cap H_{p+1}$, la question 1 donne

$$\dim K_{p+1} \geq (n - p) + (n - 1) - n = n - p - 1.$$

Par récurrence, $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$ pour tout $p \geq 1$.

- Un vecteur de F a ses deux dernières composantes nulles. Un vecteur de G a ses deux premières composantes nulles. Un vecteur commun n'a donc que sa troisième composante éventuellement non nulle. **Ainsi $F \cap G = \text{Vect}(\varepsilon_3)$, de dimension 1**, ce qui égale la minoration $3 + 3 - 5 = 1$. En revanche, pour $F = G$, l'intersection est de dimension 3 : la minoration n'est pas toujours atteinte.
- Dans $\mathbb{R}^4$, les plans $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $\text{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ ont une intersection réduite à $\{0\}$. **C'est donc possible dans $\mathbb{R}^4$** . Dans $\mathbb{R}^3$, en revanche, $2 + 2 > 3$. **Deux plans de $\mathbb{R}^3$ se coupent toujours au moins selon une droite.**

Corrigé de l'exercice 20 : Familles d'exponentielles et dimension infinie

- Supposons $\sum_{k=1}^p c_k f_{\lambda_k} = 0$ avec des coefficients non tous nuls. Soit m le plus grand indice tel que $c_m \neq 0$. Pour tout réel x , on a $\sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k x} = 0$. On divise par $e^{\lambda_m x} > 0$:

$$c_m + \sum_{k=1}^{m-1} c_k e^{(\lambda_k - \lambda_m)x} = 0.$$

Pour $k < m$, on a $\lambda_k - \lambda_m < 0$, donc $e^{(\lambda_k - \lambda_m)x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par passage à la limite, $c_m = 0$. C'est une contradiction. **La famille est donc libre.**

- Supposons $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = n$. La famille $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ est libre d'après la question 1. Elle aurait donc au plus n éléments, ce qui est absurde. **Donc $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.**
- On a $\text{ch} = \frac{1}{2}(f_1 + f_{-1})$ et $\text{sh} = \frac{1}{2}(f_1 - f_{-1})$. Donc $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) \subset \text{Vect}(f_1, f_{-1})$. Inversement, $f_1 = \text{ch} + \text{sh}$ et $f_{-1} = \text{ch} - \text{sh}$. Les deux sous-espaces sont donc égaux. Enfin, (f_1, f_{-1}) est libre par la question 1. **Ainsi $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh}) = \text{Vect}(f_1, f_{-1})$ est de dimension 2.**
- Pour tout x , $e^{x+1} = e \cdot e^x$. La relation $e \cdot f_1 - (x \rightarrow e^{x+1}) = 0$ est non triviale. **La famille est liée.** Il ne faut pas confondre ces deux fonctions avec des exponentielles d'exposants λ distincts : leur coefficient λ vaut 1 dans les deux cas.

Corrigé de l'exercice 21 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Si $j \neq i$, le facteur $X - a_j$ figure dans L_i , donc $L_i(a_j) = 0$. Si $j = i$, chaque facteur vaut $\frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1$. Ainsi $L_i(a_j)$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
2. Chaque L_i est un produit de n facteurs de degré 1, donc $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\sum_i \lambda_i L_i = 0$. En évaluant en a_j , la question 1 donne $\lambda_j = 0$, pour tout j . La famille est libre et compte $n + 1$ vecteurs, avec $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. C'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $P = \sum_i c_i L_i$ la décomposition de P . En évaluant en a_j , on obtient $P(a_j) = c_j$. Donc $P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$. Pour $P = 1$, toutes les valeurs $P(a_i)$ valent 1. Ainsi $L_0 + \dots + L_n = 1$.
4. Le calcul direct donne
$$L_0 = \frac{X(X-1)}{(-1)(-2)} = \frac{X(X-1)}{2}, \quad L_1 = \frac{(X+1)(X-1)}{(1)(-1)} = 1 - X^2, \quad L_2 = \frac{(X+1)X}{(2)(1)} = \frac{X(X+1)}{2}.$$
Pour $P = X^2 + X + 1$, on a $P(-1) = 1$, $P(0) = 1$ et $P(1) = 3$. Vérifions :
$$\frac{X^2 - X}{2} + 1 - X^2 + \frac{3X^2 + 3X}{2} = \frac{4X^2 + 2X}{2} + 1 - X^2 = X^2 + X + 1.$$
Les coordonnées de P sont bien $(1, 1, 3)$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : commutant d'une matrice carrée d'ordre 2

1. La matrice nulle commute avec A . Soit $M, M' \in \mathcal{C}(A)$ et λ, μ réels. Par bilinéarité du produit matriciel,

$$A(\lambda M + \mu M') = \lambda AM + \mu AM' = \lambda MA + \mu M'A = (\lambda M + \mu M')A.$$

Donc $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel. Enfin, $AI = IA = A$ et $AA = AA$, donc I et A sont dans $\mathcal{C}(A)$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On calcule $AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$. L'égalité donne $c = 0$ et $d = a$. Donc $M = aI + bN$. Réciproquement, I et $N = A - I$ sont dans $\mathcal{C}(A)$. La famille (I, N) est libre, car $aI + bN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. **Ainsi $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I, N)$ et $\dim \mathcal{C}(A) = 2$.**
3. Une matrice triangulaire supérieure s'écrit $aE_{11} + bE_{12} + dE_{22}$, et une matrice symétrique s'écrit $aE_{11} + b(E_{12} + E_{21}) + dE_{22}$. Ces familles sont libres, par identification des coefficients. **Donc (E_{11}, E_{12}, E_{22}) est une base de $\mathcal{T}$, $(E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22})$ une base de $\mathcal{S}$, et les deux dimensions valent 3.** Une matrice à la fois symétrique et triangulaire supérieure a un coefficient $(2, 1)$ nul, donc un coefficient $(1, 2)$ nul : elle est diagonale. **Ainsi $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ est l'espace des matrices diagonales, de base (E_{11}, E_{22}) et de dimension 2.** Par la formule de Grassmann, $\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 3 + 3 - 2 = 4$. **Donc $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et la somme n'est pas directe.**
4. La matrice $aI + bN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $b = 0$. **Donc $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{S} = \text{Vect}(I)$, de dimension 1.** Ensuite, $\dim(\mathcal{C}(A) + \mathcal{S}) = 2 + 3 - 1 = 4$. **Ainsi $\mathcal{C}(A) + \mathcal{S} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
5. On calcule $BM = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$ et $MB = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}$. Les coefficients $(1, 1)$ et $(2, 2)$ donnent tous deux $2c = 3b$. Le coefficient $(2, 1)$ donne $3a + 3c = 3d$, soit $d = a + c$. Enfin, le coefficient $(1, 2)$ donne $2d = 2a + 3b$, qui découle des deux conditions précédentes. Donc $c = \frac{3b}{2}$ et $d = a + \frac{3b}{2}$. Ainsi
- $$M = aI + \frac{b}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = aI + \frac{b}{2}(B - I).$$
- Donc $\mathcal{C}(B) \subset \text{Vect}(I, B)$. L'inclusion inverse vient de la question 1. **Ainsi $\mathcal{C}(B) = \text{Vect}(I, B)$, de dimension 2,** car B n'est pas multiple de I .
6. Une matrice de $\mathcal{C}(A)$ s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Elle est dans $\mathcal{C}(B)$ si et seulement si $0 = \frac{3b}{2}$ et $a = a + 0$, c'est-à-dire $b = 0$. **Donc $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \text{Vect}(I)$.** Par la formule de Grassmann, $\dim(\mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)) = 2 + 2 - 1 = 3$. Or cette somme est engendrée par I , N et B . Trois vecteurs qui engendrent un espace de dimension 3 en forment une base. **Ainsi (I, N, B) est une base de $\mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$, qui est de dimension 3.**

Point de méthode : pour décrire un sous-espace de matrices, on écrit une matrice générale avec ses coefficients, on traduit la condition en équations, puis on reconnaît une combinaison linéaire de matrices fixes.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [bases et dimension, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur bases et dimension](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels](#)
- Chapitre précédent : [Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels](#)
- Chapitre suivant : [Applications linéaires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)