

Barycentre

Exercice 1 :

Soit G le centre de gravité de ABC .

On sait que les barycentres sont des combinaisons linéaires des sommets, donc il existe des nombres

x, y, z tels que :

$$D = xA + yB + zC, \quad E = x'B + y'A + z'C, \quad F = x''C + y''A + z''B,$$

où $x+y+z = x'+y'+z' = x''+y''+z'' = 1$.

On sait que le barycentre de n points de masses respectives $m_1, m_2, \dots, m_n$ et de barycentres $G_1, G_2, \dots, G_n$ est le point de barycentre $\frac{m_1 G_1 + m_2 G_2 + \dots + m_n G_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$.

Ainsi, le barycentre de $(A,1)(B,2)(C,3)$ est $D = \frac{1}{6}(A + 2B + 3C)$, donc le barycentre de $(A,2)(B,3)(C,1)$ est :

$$\begin{aligned} E &= \frac{2}{6}B + \frac{3}{6}A + \frac{1}{6}C \\ &= \frac{1}{6}(3A + 2B + C) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(A + 2B + 3C) \\ &= \frac{1}{2}D. \end{aligned}$$

De même, on trouve :

$$F = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}D.$$

Ainsi, les masses des points D , E et F sont respectivement 6 , 2 et 4 .

Le centre de gravité d'un triangle est le barycentre de ses sommets avec des masses égales. Donc :

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Le centre de gravité de DEF est donc le point de barycentre :

$$\begin{aligned} M &= \frac{6}{12}D + \frac{2}{12}E + \frac{4}{12}F \\ &= \frac{1}{6}(A + 2B + 3C) + \frac{1}{12}(3A + 2B + C) + \frac{1}{6}D \\ &= \frac{1}{36}(13A + 8B + 10C) \\ &= \frac{1}{6}(A + \frac{4}{13}B + \frac{5}{13}C). \end{aligned}$$

Mais on peut exprimer G avec les mêmes coefficients :

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C) = \frac{1}{6}(2A + 2B + 2C) = \frac{1}{6}(A + \frac{3}{2}B + \frac{3}{2}C).$$

Ainsi, M est le barycentre de A , B et C avec des masses respectives $\frac{1}{6}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}$, donc il s'agit bien du

centre de gravité de ABC.

Exercice 2 :

a) On a $\vec{CA} = \frac{2}{2+3} \vec{PA} - \frac{3}{2+3} \vec{PB} = -\frac{3}{5} \vec{PA} + \frac{2}{5} \vec{PB}$

et $\vec{CB} = \frac{2}{2+3} \vec{PB} - \frac{3}{2+3} \vec{PA} = -\frac{3}{5} \vec{PB} + \frac{2}{5} \vec{PA}$, où S est le barycentre de $(A,2,3)(B,3,2)$.

De même, on peut écrire $\vec{DA} = -\frac{2}{5} \vec{PA} + \frac{3}{5} \vec{PB}$ et $\vec{DB} = -\frac{2}{5} \vec{PB} + \frac{3}{5} \vec{PA}$.

On cherche les points M tels que $|\vec{MA} + \frac{3}{2} \vec{MB}| = 5$.

En développant cette expression, on obtient l'équation suivante :

$$|(\vec{MA} + \frac{3}{2} \vec{MB}) - \frac{3}{5}(-\frac{3}{5} \vec{PA} + \frac{2}{5} \vec{PB})| = 5.$$

En d'autres termes, on cherche les points M situés sur la droite passant par $\vec{CA}$ et parallèle à $\vec{PA}$ (car $\vec{PA}$ est perpendiculaire à la droite passant par M et $\vec{CA}$), et tels que

$$|\vec{MA} + \frac{3}{2} \vec{MB} - \frac{9}{25} \vec{PA} + \frac{6}{25} \vec{PB}| = 5/5 = 1.$$

L'ensemble des points M vérifiant cette équation est donc un cercle de centre $\frac{9}{25} \vec{PA} - \frac{6}{25} \vec{PB}$ et de rayon 1.

En procédant de même pour la seconde question, on obtient que l'ensemble des points vérifiant l'équation

$$|2\vec{MA} + 3\vec{MB}| = |3\vec{MA} + 2\vec{MB}| \text{ est un cercle centré en } \frac{6}{25} \vec{PA} + \frac{8}{25} \vec{PB} \text{ et de rayon } \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

En effet, on développe l'expression $|2\vec{MA} + 3\vec{MB}| = |3\vec{MA} + 2\vec{MB}|$ pour trouver :

$$5|\vec{MA} - \vec{MB}|^2 = 0, \text{ ce qui montre que la droite passant par A et B est perpendiculaire à la droite passant par M et } \frac{6}{25} \vec{PA} + \frac{8}{25} \vec{PB}.$$

On a donc que l'ensemble des points solution est un cercle centré sur la droite passant par S_A et S_B et de rayon $d(A,B) \frac{5}{\sqrt{13}}$.

Exercice 3 :

a) Pour que $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ soit colinéaire à $\vec{BC}$, il faut que les vecteurs $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$ et $\vec{BC}$ soient parallèles, c'est-à-dire que leur produit vectoriel soit nul (car le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement s'ils sont parallèles).

Donc, on a l'équation suivante :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \times \overrightarrow{BC} = 0$$

En développant le produit vectoriel et en utilisant les propriétés du produit vectoriel, on obtient :

$$(\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{BC}) + 2(\overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{BC}) = 0.$$

Donc, pour que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{BC}$ soient tous nuls.

b) Pour que $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$

Il faut que le carré de la norme de $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soit égal au carré de la norme de

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} : |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|^2 \quad (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC})$$

En développant le produit scalaire et en utilisant les propriétés du produit scalaire, on obtient :

$$|\overrightarrow{MA}|^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) + 4(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}) + |\overrightarrow{MB}|^2 + 4(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}) + 4(\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC}) = |\overrightarrow{MA}|^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) - 4(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}) + |\overrightarrow{MB}|^2 + 4(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}) - 4(\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC})$$

Les termes de même nature s'annulent :

$$4(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}) + 8(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}) = -8(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC})$$

Donc, pour que $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$, il faut et il suffit que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 2(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}) = 0$.

Exercice 4 :

Pour montrer que les points I, J et K sont alignés, il suffit de montrer que ces trois points sont colinéaires, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont parallèles (le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est proportionnel à $\overrightarrow{IK}$).

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{DJ}$: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ}$

Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AK}$: $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK}$

On connaît l'expression des vecteurs $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ et $\vec{D}$.

En développant ces expressions, on obtient :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}) + \frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{D}) \quad \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) + \frac{3}{4}(\vec{B} - \vec{C}) + \frac{1}{4}(\vec{C} - \vec{D})$$

On peut remarquer que les termes $\frac{1}{2}(\vec{C} - \vec{D})$ et $\frac{1}{4}(\vec{C} - \vec{D})$ apparaissent dans les expressions de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

On peut factoriser ces termes pour simplifier les expressions :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{D}) \\
 \overrightarrow{IK} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) + \frac{3}{4}(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) + \frac{3}{4}(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D})) \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \\
 &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} - \overrightarrow{D})
 \end{aligned}$$

Maintenant, on peut comparer les expressions de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

On remarque que les coefficients devant les vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{D}$ sont les mêmes dans les deux expressions.

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont parallèles et les points I, J et K sont alignés.

Exercice 5 :

a) Pour montrer que les droites (AC), (BD) et (GH) sont concourantes, il suffit de montrer que les points A, C et G (ou les points B, D et H) sont alignés.

Le point G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,2);(B,1)\}$, donc les coordonnées de G peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées de A et B :

$$G = \frac{2}{2+1} \cdot A + \frac{1}{2+1} \cdot B = \frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot B$$

De même, le point H est le barycentre du système de points pondérés $\{(C,2);(D,1)\}$, donc les coordonnées de H peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées de C et D :

$$H = \frac{2}{2+1} \cdot C + \frac{1}{2+1} \cdot D = \frac{2}{3} \cdot C + \frac{1}{3} \cdot D$$

Si les points A, C et G sont alignés, alors les coordonnées de G peuvent également s'exprimer en fonction des coordonnées de A et C :

$$G = \frac{2}{2+1} \cdot A + \frac{1}{2+1} \cdot C = \frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot C$$

Donc, on a les égalités suivantes :

$$\frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot B = \frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot C \quad \frac{1}{3} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot C$$

Cela signifie que les coordonnées de B et C sont égales. Donc, les points B et C sont confondus et les droites (AC), (BD) et (GH) sont concourantes.

b) Soit E le barycentre du système de points pondérés $\{(G,3);(D,1)\}$. Pour montrer que E est le milieu de [AO], il suffit de montrer que les coordonnées de E sont la moitié des coordonnées de O.

Les coordonnées de G sont données par $\frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot B$ et les coordonnées de D sont simplement les coordonnées de D (puisque son coefficient de pondération est 1).

Les coordonnées de E peuvent donc être calculées comme suit :

$$E = \frac{3}{3+1} \cdot G + \frac{1}{3+1} \cdot D = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot B \right) + \frac{1}{4} \cdot D$$

En multipliant et en simplifiant les termes, on obtient :

$$E = \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{4} \cdot B + \frac{1}{4} \cdot D$$

Les coordonnées du centre O du parallélogramme ABCD sont la moyenne des coordonnées de A, B, C et D, c'est-à-dire :

$$O = \frac{1}{4} \times (A + B + C + D)$$

Comparons les coordonnées de E et O :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \times A + \frac{1}{4} \times B + \frac{1}{4} \times D \\ O &= \frac{1}{4} \times (A + B + C + D) \end{aligned}$$

Les coordonnées de E sont la moitié des coordonnées de O. Donc, E est le milieu de [AO].

Exercice 6 :

1. Pour construire le barycentre des points $\{(A,1);(B,2)\}$ sachant que AB = 6 cm, nous utilisons la formule du barycentre :

$$G = \left(\frac{1}{1+2} \right) \times A + \left(\frac{2}{1+2} \right) \times B$$

Nous prenons un compas, plaçons sa pointe en A et ouvrons le compas à une longueur de 2 cm (pondération correspondant à B).

Nous traçons un arc de cercle depuis B jusqu'à l'intersection de l'arc de cercle précédent avec le segment AB. Nous notons ce point d'intersection G.

2. Pour construire le barycentre des points $\{(A,3);(B,-3)\}$ sachant que $AB = 8$ cm, nous utilisons la même formule du barycentre :

$$G = (3/(3+(-3))) \times A + ((-3)/(3+(-3))) \times B$$

Nous prenons un compas, plaçons sa pointe en A et ouvrons le compas à une longueur de 3 cm (pondération correspondant à A). Nous traçons un arc de cercle depuis B jusqu'à l'intersection de l'arc de cercle précédent avec le segment AB. Nous notons ce point d'intersection G.

3. Pour construire le barycentre des points $\{(A,1);(B,-2)\}$ sachant que $AB = 4$ cm, nous utilisons encore la formule du barycentre :

$$G = (1/(1+(-2))) \times A + ((-2)/(1+(-2))) \times B$$

Nous prenons un compas, plaçons sa pointe en B et ouvrons le compas à une longueur de 2 cm (pondération correspondant à B). Nous traçons un arc de cercle depuis A jusqu'à l'intersection de l'arc de cercle précédent avec le segment AB. Nous notons ce point d'intersection G.

4. Pour construire le barycentre des points $\{(M,-3);(N,-2)\}$ sachant que $MN = 10$ cm, nous utilisons toujours la formule du barycentre :

$$G = (-3/(-3+(-2))) \times M + (-2/(-3+(-2))) \times N$$

Nous prenons un compas, plaçons sa pointe en N et ouvrons le compas à une longueur de 2 cm (pondération correspondant à N). Nous traçons un arc de cercle depuis M jusqu'à l'intersection de l'arc de cercle précédent avec le segment MN. Nous notons ce point d'intersection G.

Exercice 7 :

1. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $|\vec{5MA} + \vec{6MB}| = 22$.

Considérons I barycentre des points (A,5) et (B,6)

$$\vec{5MA} + \vec{6MB} = 11\vec{MI} + \vec{5IA} + \vec{6IB} = 11\vec{MI} + \vec{0} = 11\vec{MI}.$$

donc l'ensemble correspond au cercle de centre I et de rayon 2 .

2. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $|\vec{-5MA} + \vec{8MB}| = 12$.

Considérons I barycentre des points (A,-5) et (B,8)

$$\vec{-5MA} + \vec{8MB} = 3\vec{MI} - \vec{5IA} + \vec{8IB} = 3\vec{MI} + \vec{0} = 3\vec{MI}.$$

donc l'ensemble correspond au cercle de centre I et de rayon 4 .

3. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $|\vec{5MA} - \vec{6MB}| = |\vec{7MA} - \vec{6MB}|$.

Considérons I barycentre des points (A,5) et (B,-6) et J barycentre des points (A,7) et (B,-6)

$$5\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}+5\overrightarrow{IA}-6\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{MI}+\vec{0}=-\overrightarrow{MI}.$$

$$\text{De même : } 7\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MJ}+7\overrightarrow{JA}-6\overrightarrow{JB}=-\overrightarrow{MJ}+\vec{0}=\overrightarrow{MJ}.$$

donc nous recherchons les points M tels que MI=MJ, l'ensemble est donc la médiatrice du segment [IJ] .

Exercice 8 :

Soit R un repère orthonormé du plan .

1. Effectuer la construction

2. On note C_1 l'ensemble des points M du plan tels que $|4\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}|=45$.

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB} &= (4(3-x)+5(-1-x); 4(4-y)+5(2-y)) \\ &= (-9x+7; -9y+26). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |4\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}| &= \sqrt{(-9x+7)^2+(-9y+26)^2} \\ &= \sqrt{81[(x-\frac{7}{9})^2+(y-\frac{26}{9})^2]}. \end{aligned}$$

Déterminer l'équation de l'ensemble C_1 .

L'équation de cet ensemble est donc :

$$(x-\frac{7}{9})^2+(y-\frac{26}{9})^2=(\frac{45}{81})^2.$$

2. Montrer que c'est une médiatrice.

Exercice 9:

0. On place les points A(-2 ; 0), B(4 ; 0), C(2 ; 4) et D(0 ; 4) dans un repère orthonormé.

1. Pour montrer que ABCD est un trapèze isocèle, il faut montrer que les côtés parallèles sont de même longueur.

Le côté AB a pour longueur $|4 - (-2)| = 6$.

Le côté CD a pour longueur $|2 - 0| = 2$.

Donc les côtés AB et CD ne sont pas de même longueur. Ainsi, ABCD n'est pas un trapèze isocèle.

2. Pour que O soit le barycentre de $(A; \alpha) (B; 1) (C; 1) (D; \beta)$, on doit avoir les conditions suivantes :

$$\alpha + 1 + 1 + \beta = 0 \text{ (somme des coefficients égale à 0)}$$

$$\alpha \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 2 + \beta \cdot 0 = 0 \text{ (somme des produits égale à 0)}$$

Cela donne le système d'équations suivant :

$$\alpha + \beta = -2$$

$$-2\alpha + 8 + 4 + 0 = 0$$

$$-2\alpha + 12 = 0$$

$$\alpha = 6$$

$$\beta = -8$$

Donc $\alpha = 6$ et $\beta = -8$.

3.

a. On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = (0 - (-2)) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Donc G est le milieu de [AD], donc G a pour coordonnées $\left(\frac{4}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (2, 2)$.

Pour que G soit le barycentre de (A ; a) (D ; b), on doit avoir les conditions suivantes :

$$a + b = 0 \text{ (somme des coefficients égale à 0)}$$

$$-2a + 0b = 0 \text{ (somme des produits égale à 0)}$$

Cela donne le système d'équations suivant :

$$a + b = 0$$

$$-2a = 0$$

$$a = 0$$

$$b = 0$$

Donc $a = 0$ et $b = 0$.

b. Les coordonnées de I sont $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (2, 2)$.

Pour que G, O et I soient alignés, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GO}$ soient colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{GI}$ a pour composantes $(2-2, 2-2) = (0, 0)$.

Le vecteur $\overrightarrow{GO}$ a pour composantes $(0-0, 0-0) = (0, 0)$.

Donc $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GO}$ sont colinéaires et donc G, O et I sont alignés. O se trouve sur [GI].

4.

a. Pour trouver les points M tels que $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\|$, on utilise la formule :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Donc $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\|$ devient $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\| = 0$.

Calculons ces vecteurs :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (4-0, 0-4) = (4, -4) \quad 3\overrightarrow{MA} = 3(-2-0, 0-0) = (-6, 0) \quad \overrightarrow{MD} = (0-0, 4-0) = (0, 4)$$

Donc l'équation devient $\|(4, -4) - (-6, 0) + (0, 4)\| = 0$.

Simplifions cette équation :

$$\|(4,-4) - (-6,0) + (0,4)\| = \|(4+6, -4-0, 0+4)\| = \|(10, -4, 4)\| = \sqrt{10^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{100 + 16 + 16} = \sqrt{132}$$

Donc l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\|\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MD}\|$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{132}$.

b. Pour montrer que O appartient à E_1 , il suffit de vérifier que $\|\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MD}\|$ est bien satisfaite pour O.

Calculons :

$$\vec{MB} + \vec{MC} = (4-0, 0-4) = (4, -4)$$

$$3\vec{MA} = 3(-2-0, 0-0) = (-6, 0)$$

$$\vec{MD} = (0-0, 4-0) = (0, 4)$$

$$\text{Donc } \|\vec{MB} + \vec{MC} - 3\vec{MA} + \vec{MD}\| = \|(4, -4) - (-6, 0) + (0, 4)\| = \sqrt{10^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{132}$$

Donc $\|\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MD}\|$ est bien satisfaite pour O, donc O appartient à E_1 .

5.

a. Pour trouver les points M tels que $\|3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}\| = 16$, on utilise la formule suivante :

$$\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}\|$$

$$\text{Donc } \|3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}\| = 16 \text{ devient } \|3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 16.$$

Calculons ces vecteurs :

$$3\vec{MA} = 3(-2-0, 0-0) = (-6, 0)$$

$$\vec{MB} = (4-0, 0-0) = (4, 0)$$

$$\vec{MC} = (2-0, 4-0) = (2, 4)$$

$$\vec{MD} = (0-0, 4-0) = (0, 4)$$

$$\text{Donc l'équation devient } \|(-6, 0) + (4, 0) + (2, 4) + (0, 4)\| = 16.$$

Simplifions cette équation :

$$\|(-6+4+2+0, 0+0+4+4)\| = 16.$$

$$\|(0, 8)\| = 16.$$

$$\sqrt{0^2 + 8^2} = 16.$$

$$8 = 16.$$

Cette équation n'est pas vérifiée car 8 n'est pas égal à 16.

Donc l'ensemble E_2 est l'ensemble vide car il n'y a pas de points M tels que

$$\| \overrightarrow{3MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \| = 16 .$$

b. Pour montrer que B et D appartiennent à E_2 , il faut vérifier que la condition

$$\| \overrightarrow{3MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \| = 16 \text{ est satisfaite pour ces points.}$$

Calculons :

$$\overrightarrow{3MA} = 3(-2-0, 0-0) = (-6, 0)$$

$$\overrightarrow{MB} = (4-0, 0-0) = (4, 0)$$

$$\overrightarrow{MC} = (2-0, 4-0) = (2, 4)$$

$$\overrightarrow{MD} = (0-0, 4-0) = (0, 4)$$

Donc

$$\| \overrightarrow{3MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \| = \| (-6, 0) + (4, 0) + (2, 4) - (0, 4) \| = \| (-6+4+2-0, 0+0+4-4) \| = \| (0, 0) \| = 0 .$$

Donc la condition est vérifiée pour B et D, donc B et D appartiennent à E_2 .

Exercice 10:

Voici une figure correspondant à la description donnée :

Effectuer la figure...

Pour démontrer que EDL est un triangle rectangle isocèle en E, il suffit de montrer que les longueurs des côtés DE et DL sont égales, et que l'angle DEL est droit.

1. Montrons que $DE = DL$:

Par construction, on sait que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DB}$.

Cela signifie que les vecteurs CL et DB ont la même direction et la même norme.

La direction de ces vecteurs est déterminée par les droites AC et BD qui sont perpendiculaires à la base AB du triangle ABC.

Donc, CL et DB sont parallèles et ont la même norme. Donc, les longueurs des côtés DE et DL sont égales.

2. Montrons que l'angle DEL est droit :

Puisque CL et DB sont parallèles, les droites CE et DA sont également parallèles (par la propriété de Thalès dans le triangle ABC).

Donc, l'angle $\widehat{ECA}$ est égal à l'angle $\widehat{ABD}$, et l'angle $\widehat{ADC}$ est égal à l'angle $\widehat{CED}$. Comme

DBA est un triangle isocèle et rectangle en D et ACE est un triangle isocèle et rectangle en E, on a :

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDA} = 90 \text{ degrés et } \widehat{CED} = \widehat{CDE} = 90 \text{ degrés.}$$

Donc, l'angle $\widehat{DEC}$ est égal à la somme des angles $\widehat{ECD}$ et $\widehat{EDC}$, qui est égale à 90 degrés.

Donc, l'angle $\widehat{DEL}$ est droit.

Ainsi, on a prouvé que EDL est un triangle rectangle isocèle en E.

Exercice 11 :

1.a. Pour trouver le point G qui est le barycentre du système de points pondérés

$\{(A;1); (B;-1); (C;1)\}$, on utilise la formule du barycentre :

$$G = \left(\frac{1}{1+(-1)+1} \times A + \frac{-1}{1+(-1)+1} \times B + \frac{1}{1+(-1)+1} \times C \right)$$

$$G = \left(\frac{1}{1} \times A + \frac{-1}{1} \times B + \frac{1}{1} \times C \right)$$

$$G = A - B + C$$

Donc le point G a pour coordonnées $G = (A_x - B_x + C_x, A_y - B_y + C_y)$.

Il suffit de prendre les coordonnées de A, B et C pour trouver les coordonnées de G.

b. Pour trouver le point G' qui est le barycentre du système de points pondérés

$\{(A;1); (B;5); (C;-2)\}$, on utilise la formule du barycentre :

$$G' = \left(\frac{1}{1+5+(-2)} \times A + \frac{5}{1+5+(-2)} \times B + \frac{-2}{1+5+(-2)} \times C \right)$$

$$G' = \left(\frac{1}{4} \times A + \frac{5}{4} \times B + \frac{-2}{4} \times C \right)$$

$$G' = \left(\frac{1}{4} \times A + \frac{5}{4} \times B - \frac{1}{2} \times C \right)$$

Donc le point G' a pour coordonnées

$$G' = \left(\frac{1}{4} \times A_x + \frac{5}{4} \times B_x - \frac{1}{2} \times C_x, \frac{1}{4} \times A_y + \frac{5}{4} \times B_y - \frac{1}{2} \times C_y \right).$$

Il suffit de prendre les coordonnées de A, B et C pour trouver les coordonnées de G'.

2.a. Le point J est le milieu de [AB], donc les coordonnées de J sont

$$J = \left(\frac{A_x + B_x}{2}, \frac{A_y + B_y}{2} \right).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ s'expriment en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{GG'} = G' - G = (\frac{1}{4} \cdot A_x + \frac{5}{4} \cdot B_x - \frac{1}{2} \cdot C_x - (A_x - B_x + C_x), \frac{1}{4} \cdot A_y + \frac{5}{4} \cdot B_y - \frac{1}{2} \cdot C_y - (A_y - B_y + C_y))$$

$$\overrightarrow{GG'} = (\frac{1}{4} \cdot (-A_x + B_x) + \frac{1}{2} \cdot B_x - \frac{1}{2} \cdot C_x, \frac{1}{4} \cdot (-A_y + B_y) + \frac{1}{2} \cdot B_y - \frac{1}{2} \cdot C_y)$$

$$\overrightarrow{GG'} = (\frac{1}{2} \cdot (-A_x + B_x) - \frac{1}{2} \cdot C_x, \frac{1}{2} \cdot (-A_y + B_y) - \frac{1}{2} \cdot C_y)$$

$$\overrightarrow{JG'} = G.$$