

Barycentre

Exercice 1 :

1. Le barycentre G des points $(A,1)$ et $(B,2)$ a pour coordonnées :

$G = (\frac{A+2B}{3}, \frac{1+2}{3})$ [https://mathovore.fr/cgi-bin/mimetex.cgi? AB=6](https://mathovore.fr/cgi-bin/mimetex.cgi?AB=6) cm, on peut utiliser la relation de Chasles pour exprimer B en fonction de A : $2B = (A+B) + AB$. Ainsi, on peut écrire :

$G = (\frac{3A+2(A+6)}{3}, \frac{3}{3}) = (\frac{2A+6}{3}, 1)$ <https://mathovore.fr/cgi-bin/mimetex.cgi?> G a pour abscisse $\frac{2A+6}{3}$.

2. Le barycentre G des points $(A,3)$ et $(B,-3)$ a pour coordonnées :

$$G = (\frac{A-3B}{2}, \frac{3-3}{2}) = (\frac{A-3B}{2}, 0)$$

Comme $AB = 8$ cm, on peut utiliser la relation de Chasles pour exprimer B en fonction de A : $-3B = (A-B) - AB$. Ainsi, on peut écrire :

$$G = (\frac{4A+8}{2}, 0) = (2A+4, 0)$$

Donc le barycentre G a pour abscisse $2A+4$.

3. Le barycentre G des points $(A,1)$ et $(B,-2)$ a pour coordonnées :

$$G = (\frac{A-2B}{3}, \frac{1-2}{3}) = (\frac{A-2B}{3}, -\frac{1}{3})$$

Comme $AB = 4$ cm, on peut utiliser la relation de Chasles pour exprimer B en fonction de A : $-2B = (A-B) - AB$. Ainsi, on peut écrire :

$$G = (\frac{3A-2(A-4)}{3}, -\frac{1}{3}) = (\frac{2A+8}{3}, -\frac{1}{3})$$

Donc le barycentre G a pour abscisse $\frac{2A+8}{3}$.

4. Le barycentre G des points $(M,-3)$ et $(N,-2)$ a pour coordonnées :

$$G = \left(\frac{M+N}{2}, \frac{-3-2}{2} \right) = \left(\frac{M+N}{2}, -\frac{5}{2} \right)$$

Comme $MN = 10\text{cm}$, on peut utiliser la relation de Chasles pour exprimer G en fonction de M : $N = (M+N) - MN$. Ainsi, on peut écrire :

$$G = \left(\frac{2M+10}{2}, -\frac{5}{2} \right) = (M+5, -\frac{5}{2})$$

Donc le barycentre G a pour abscisse $M+5$.

A vous d'effectuer ces constructions en sachant que le barycentre est forcément aligné avec les points A et B.

Exercice 2 :

1. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $|5\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB}| = 22$.

Considérons I barycentre des points (A,5) et (B,6)

$$5\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} = 11\overrightarrow{MI} + 5\overrightarrow{IA} + 6\overrightarrow{IB} = 11\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 11\overrightarrow{MI}.$$

donc l'ensemble correspond au cercle de centre I et de rayon 2.

2. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $|-5\overrightarrow{MA} + 8\overrightarrow{MB}| = 12$.

Considérons I barycentre des points (A,-5) et (B,8)

$$-5\overrightarrow{MA} + 8\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI} - 5\overrightarrow{IA} + 8\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MI}.$$

donc l'ensemble correspond au cercle de centre I et de rayon 4.

3. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $|5\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB}| = |7\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB}|$.

Considérons I barycentre des points (A,5) et (B,-6) et J barycentre des points (A,7) et (B,-6)

$$5\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI} + 5\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{MI} + \vec{0} = -\overrightarrow{MI}.$$

$$\text{De même : } 7\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ} + 7\overrightarrow{JA} - 6\overrightarrow{JB} = -\overrightarrow{MJ} + \vec{0} = -\overrightarrow{MJ}.$$

donc nous recherchons les points M tels que $MI = MJ$, l'ensemble est donc la médiatrice du segment [IJ].

Exercice 3 :

Soit R un repère orthonormé du plan.

1. Effectuer la construction

2. On note C_1 l'ensemble des points M du plan tels que $|4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}| = 45$.

$$4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = (4(3-x) + 5(-1-x); 4(4-y) + 5(2-y)) \\ = (-9x+7; -9y+26).$$

$$|4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(-9x+7)^2 + (-9y+26)^2}$$

$$= \sqrt{81[(x-\frac{7}{9})^2 + (y-\frac{26}{9})^2]}.$$

Déterminer l'équation de l'ensemble C_1 .

L'équation de cet ensemble est donc :

$$(x - \frac{7}{9})^2 + (y - \frac{26}{9})^2 = (\frac{45}{81})^2.$$

2. Montrer que c'est une médiatrice.

Exercice 4 :

Considérons le point G barycentre de (A,1); (B,1) et (C,2)

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{MG}$$

Considérons le point K barycentre de (B,1) et (C,3)

$$\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$$

donc cela revient à chercher l'ensemble des points du plan tels que :

$$|4\overrightarrow{MG}| = |4\overrightarrow{MK}|$$

$$|\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MK}|$$

Conclusion : l'ensemble des points M est la médiatrice du segment [MK]

Exercice 5 :

1. On trace le repère et on place les points A(1,2), B(-3,4) et C(-2,5):

2. Pour trouver les coordonnées du barycentre G, on utilise la formule:

où x_i et y_i sont les coordonnées de chaque point pondéré, w_i est son poids (c'est-à-dire le coefficient associé) et n est le nombre total de points.

On a donc:

On a donc $G(-\frac{3}{3}, \frac{8}{3})$, soit $G(-1, 2.666\dots)$. On peut le placer dans le repère:

3. Pour savoir si la droite (BG) passe par l'origine, il suffit de vérifier si les coordonnées de l'origine (0,0) vérifient l'équation de la droite, c'est-à-dire si elles correspondent à des valeurs de x et y qui satisfont l'équation de la droite. L'équation de la droite (BG) peut être trouvée en utilisant les coordonnées de B et G:

On a donc une équation de la forme $y = mx + b$, où m est le coefficient directeur $(-2/3)$ et b est l'ordonnée à l'origine $(8/3)$. Pour vérifier si l'origine appartient à la droite, on remplace x et y par 0 dans l'équation:

$$y = -2/3(x) + 8/3$$

$$y = 8/3$$

On voit que y est toujours égal à $8/3$, quelle que soit la valeur de x . L'origine ne vérifie donc pas cette équation et ne fait pas partie de la droite (BG), qui ne passe donc pas par l'origine.

Exercice 6 :

Pour démontrer que G, C et E sont alignés, il suffit de montrer que la droite (GC) passe par le point E qui est le milieu de [AB].

Calculons les coordonnées de E, sachant que E est le milieu de [AB], donc que les coordonnées de E sont la moyenne des coordonnées de A et de B:

$$x_e = (x_a + x_b)/2$$

$$y_e = (y_a + y_b)/2$$

Calculons les coordonnées de G, sachant que G est le barycentre de (A,-2), (B,-2) et (C,15):

$$x_g = (x_a \cdot -2 + x_b \cdot -2 + x_c \cdot 15)/(-2-2+15) = (15x_c - 4x_a - 4x_b)/11$$

$$y_g = (y_a \cdot -2 + y_b \cdot -2 + y_c \cdot 15)/(-2-2+15) = (15y_c - 4y_a - 4y_b)/11$$

Nous allons montrer que la droite (GC) a pour équation $y = kx + p$ où k et p sont à déterminer.

Soit C(x_c, y_c), G(x_g, y_g) et E(x_e, y_e). La pente de la droite (GC) est donc :

$$k = (y_g - y_c)/(x_g - x_c) = ((15y_c - 4y_a - 4y_b)/11 - y_c)/((15x_c - 4x_a - 4x_b)/11 - x_c)$$

$$k = (15y_c - 4y_a - 4y_b - 11y_c)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c)$$

$$k = (11y_c - 4y_a - 4y_b)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c)$$

Nous savons également que la droite (GC) passe par le point E, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'équation :

$$y_e = k \cdot x_e + p$$

Nous pouvons exprimer p en remplaçant x_e , y_e et k dans cette équation :

$$p = y_e - k \cdot x_e$$

$$p = ((y_a + y_b)/2) - ((11y_c - 4y_a - 4y_b)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c)) * ((x_a + x_b)/2)$$

$$p = ((y_a + y_b)/2) - ((11y_c - 4y_a - 4y_b)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c)) * ((x_a + x_b)/2)$$

$$p = (13y_a + 13y_b - 11y_c)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c)$$

Nous avons maintenant une expression pour k et une pour p. Nous allons montrer que la droite (GC) vérifie l'équation $y = kx + p$.

Soit un point P de la droite (GC) de coordonnées (xp, yp). Ce point vérifie l'équation (GC) :

$$y_p = k \cdot x_p + p$$

En remplaçant k et p par leurs expressions précédentes, on obtient :

$$y_p = (11y_c - 4y_a - 4y_b)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c) * x_p + (13y_a + 13y_b - 11y_c)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c)$$

Nous devons maintenant vérifier que ce point P appartient bien à la droite (GC). Pour cela, nous allons montrer que ce point vérifie l'équation du barycentre associé à G :

$$(-2) \cdot AG + (-2) \cdot BG + 15 \cdot CG = 0$$

En développant, cette équation devient :

$$(-2) \cdot (x_a + x_p) + (-2) \cdot (x_b + x_p) + 15 \cdot (x_c + x_p) = 0$$

$$-(2x_a + 2x_b - 15x_c)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c) * x_p + (2x_a + 2x_b + 11x_c)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c) * x_p = (2x_a + 2x_b - 15x_c)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c) * x_p + (2x_a + 2x_b - 15x_c)/(15x_c - 4x_a - 4x_b - 11x_c) * x_p$$

En simplifiant, on obtient :

$$(2x_a + 2x_b - 15x_c) * x_p = (2x_a + 2x_b - 15x_c) * x_p$$

Cette équation est toujours vraie et donc P appartient bien à la droite (GC), ce qui prouve que la droite (GC) passe par le point E. Finalement, G, C et E sont alignés.

Exercice 7 :

ABCD est un quadrilatère et G est la barycentre de (A, 1)(B, 1)(C, 3)(D, 3).

Construire le point G. (Argumenter)

Utilisons l'associativité du barycentre

Soit K barycentre de (A,1) (B,1) et L barycentre de (C,3) (D,3)

Les points K et L sont des isobarycentres donc ce sont les milieux de segments.

De plus ces trois barycentre existent car la somme de leurs masses est non nulle.

Par associativité du barycentre, G est le barycentre de (K,2) (L,6)

Pour construire G, il suffit de placer le point K milieu de [AB] et L milieu de [CD] .

et

$$2\overrightarrow{GK} + 6\overrightarrow{GL} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GL} + 2\overrightarrow{LK} + 6\overrightarrow{GL} = \vec{0}$$

$$8\overrightarrow{GL} = -2\overrightarrow{LK}$$

$$8\overrightarrow{GL} = 2\overrightarrow{KL}$$

$$\overrightarrow{LG} = \frac{2}{8}\overrightarrow{LK}$$

$$\overrightarrow{LG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{LK}$$

Ensuite il suffit de placer le point K au quart du segment [LK] en partant du point L.

Exercice 8 :

Indication : utiliser l'associativité du barycentre.

ABCD est un quadrilatère.

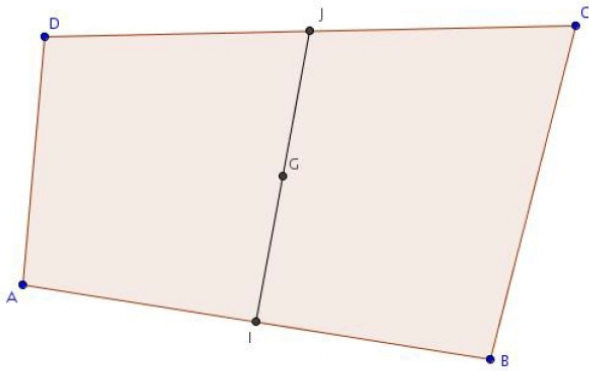
On note G son isobarycentre.

Le but de cet exercice est de préciser la position de G.

1) On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

Montrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.

2) Conclure et faire une figure.



Exercice 9 :

1. Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment [AB] pour réaliser l'équilibre ?

(M = 2 kg)

cas n° 1 :

Soit G le barycentre de (A,2) et (B,3)

G existe car $2+3=5 \neq 0$

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$5\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

Conclusion : il faut placer le crochet aux $\frac{3}{5}$ de [AB] en partant du point A.

Cas n° 2 :

Soit G le barycentre de (A,2) et (B,5)

G existe car $2+5=7 \neq 0$

$$2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

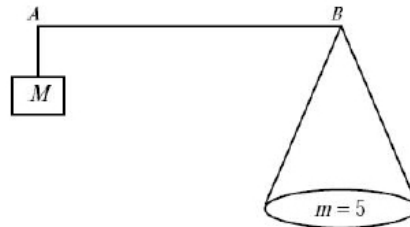
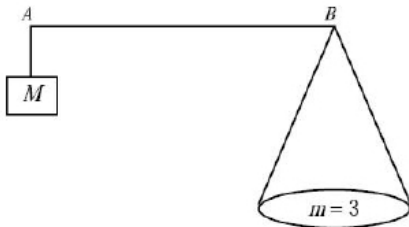
$$2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$7\overrightarrow{GA} = -5\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GA} = -\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$$

Conclusion : il faut placer le crochet aux $\frac{5}{7}$ de [AB] en partant du point A.



On pourra reproduire ces schémas à l'échelle de son choix.

Exercice 10 :

1. Soit I le milieu de [BC].

Montrer que :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$$

En utilisant l'associativité du barycentre, on peut affirmer que $G = \text{bary}(A, 2); (I, 2))$

Nous avons donc :

$$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

or

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad (\text{définition du barycentre } G)$$

donc

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$$

2. En déduire que G est le barycentre de A et I munis de coefficients que l'on précisera.

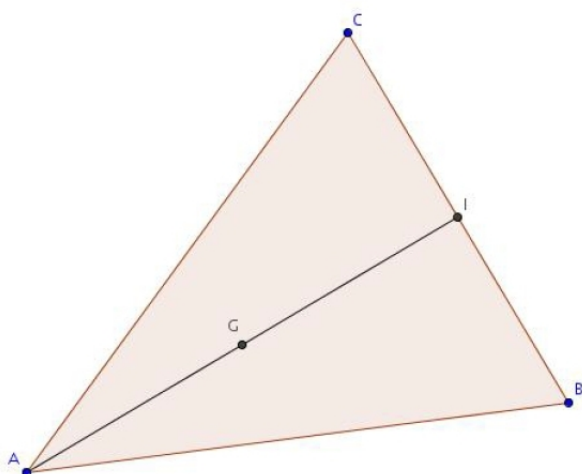
$$G = \text{bary}(A, 2); (I, 2))$$

3. Conclure.

$$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

Conclusion : G est le milieu du segment [AI] .

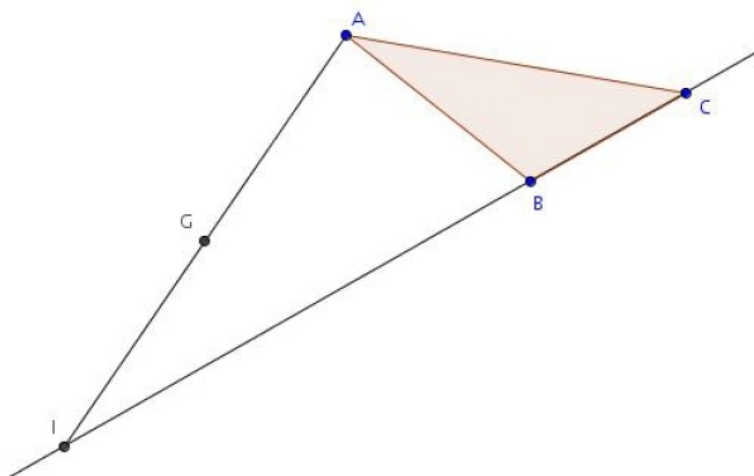


Exercice 11 :

Indication : G est le milieu de [AI] et utiliser l'associativité du barycentre.

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de (A ; 1), (B ; 4) et (C ; - 3).

1. Construire le barycentre I de (B ; 4) et (C ; - 3).
2. Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$.
3. En déduire la position de G sur (AI).



Exercice 12 :

Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de (A ; - 2), (B ; - 2) et (C ; 15).

Démontrer que G, C et E sont alignés.

Tout d'abord le barycentre G existe car $-2-2+15=11 \neq 0$

Nous avons :

$$-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+15\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

et $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Utilisons la relation de Chasles :

$$-2\overrightarrow{GE}-2\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{GE}-2\overrightarrow{EB}+15\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$-2(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB})-4\overrightarrow{GE}+15\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

or $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ car E milieu de [AB].

donc nous avons l'égalité :

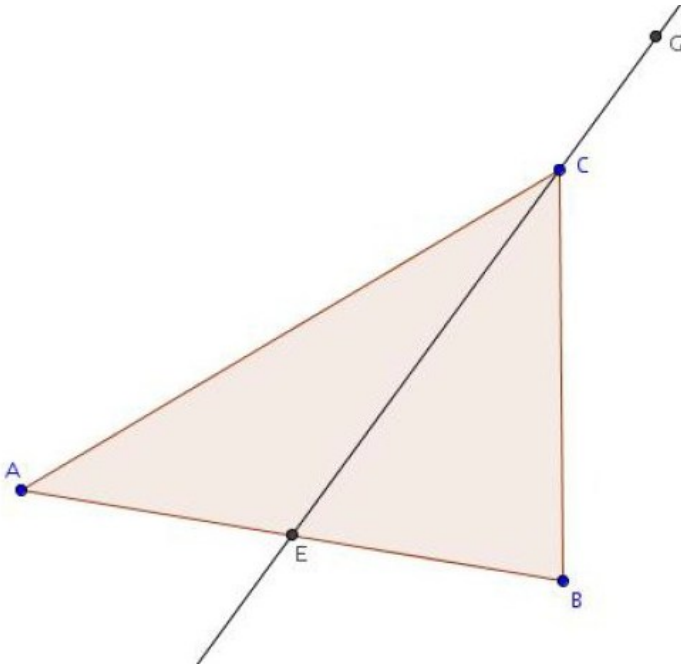
$$-4\overrightarrow{GE}+15\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{GC}=\frac{4}{15}\overrightarrow{GE}$$

On en conclue que les vecteurs $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont colinéaires .

De plus le point G appartient à ces deux vecteurs

donc **les points G,C et E sont alignés .**



Exercice 13 :

B est le milieu de [AC].

Démontrer que le barycentre de (A ; 1) et (C ; 3) est confondu avec celui de (B ; 2) et (C ; 2).

Soit $H = \text{bary}\{(A;1),(C;3)\}$ et $G = \text{bary}\{(B;2),(C;2)\}$

Nous avons :

$$\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

soit

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

en résumé :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$2\overrightarrow{GA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ (car B milieu de [AC]) et } 2\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

ainsi :

$$2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AH} = \vec{0}$$

$$2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GH} = \vec{0}$$

Conclusion : les points G et H sont confondus .

Exercice 14 :

ABC est un triangle.

1. G est le barycentre de (A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3). Construire le point G. Expliquer.

Utilisons l'associativité du barycentre.

G est le barycentre de (A,1) (I,5) avec I barycentre de (B,2) et (C,3)

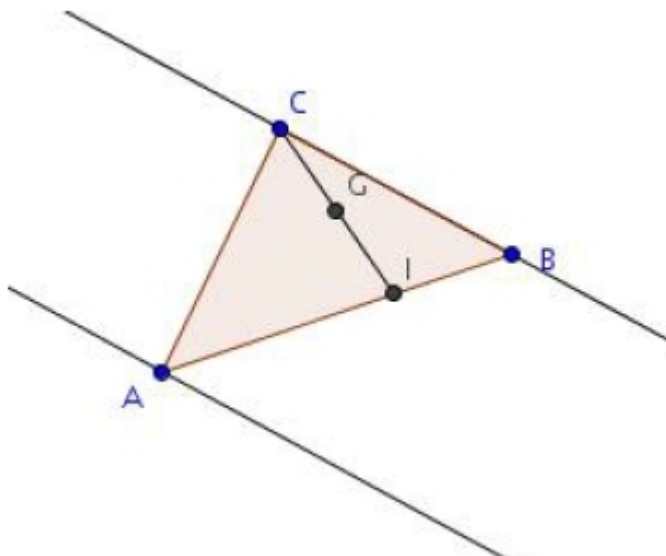
2. G' est le barycentre de (A ; 1), (B ; 3) et (C ; - 3). Construire le point G' . Expliquer.

Utilisons l'associativité du barycentre,

G' est le barycentre de (K,4) et (C,-3) avec K barycentre de (A,1) et (B,3)

3. Démontrer que (AG') est parallèle à (BC).

Indication : montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.



Exercice 15 :

Tout d'abord G existe car $1+1+3+3 = 8 \neq 0$

Notons $I = \text{bary}(A;1),(B;1)\}$ et $J = \text{bary}(C;3),(D;3)\}$

Utilisons l'**associativité du barycentre** .

alors

$$G = \text{bary}(I;2),(J;6)\}$$

On place I qui est le milieu de [AB].

On place J le milieu de [CD]

ensuite :

$$2\overrightarrow{GI} + 6\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GI} + 6\overrightarrow{GI} + 6\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$$

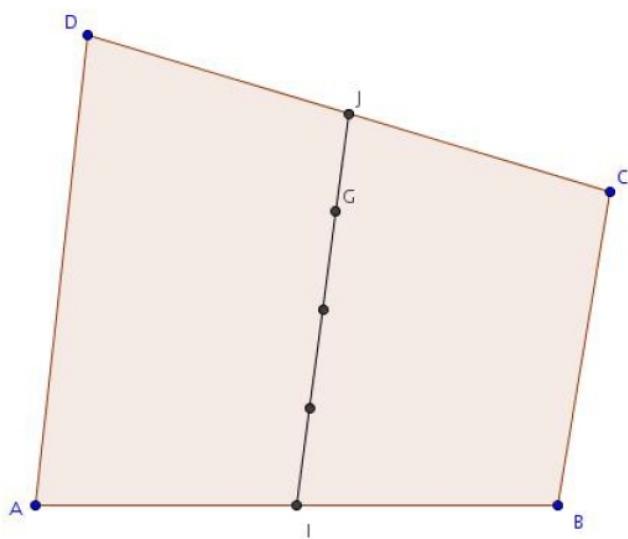
$$8\overrightarrow{GI} = -6\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{IG} = \frac{6}{8}\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{IG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$$

On divise le segment [IJ] en quatre parties égales

et on place le point G aux trois quarts de [IJ] en partant de I.



Exercice 16 :

1. Le point G étant le centre du carré ABCD, il est également le milieu de [AB] et de [BC]. On a donc $GA = GB = 2 \text{ cm}$.

2. En utilisant le point G, on peut réécrire chacun des vecteurs $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$, et $\overrightarrow{MD}$ comme la somme des vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$, et $\overrightarrow{GD}$ respectivement :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GM}$$

En additionnant ces quatre expressions, on obtient :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + 4\overrightarrow{GM}$$

Or, comme $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$, on a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GG} = \vec{0}$$

Donc :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{GM}$$

Et donc la somme peut être réduite à $4\overrightarrow{GM}$.

3. On sait que $|4\overrightarrow{GM}| = 8\sqrt{2}$, donc $|\overrightarrow{GM}| = 2\sqrt{2}$.

Donc les points M doivent être situés sur le cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{2}$. Cet ensemble de points est représenté par le cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{2}$, noté Γ_1 .

4. On cherche les points M tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ soit colinéaire à $\vec{AD}$.

Or, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA}$, donc être colinéaire à $\overrightarrow{AD}$ signifie être colinéaire à la diagonale [AC].

Donc on cherche les points M tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, ce qui est équivalent à $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$.

En utilisant les expressions précédentes pour $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$, et $\vec{MD}$, on a :

$$(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM}) - (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GM}) = \vec{0}$$

En simplifiant :

$$2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$$

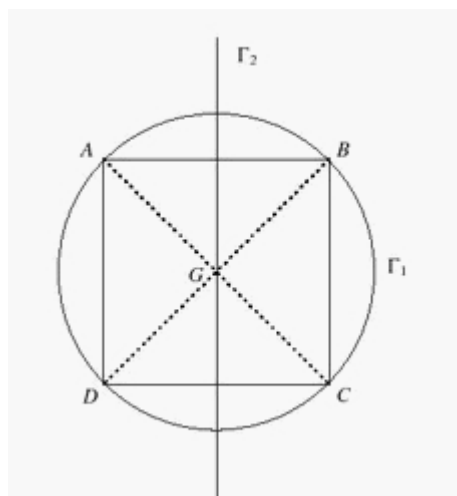
Or, comme dans la partie 2, on a $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc :

$$\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

Autrement dit, les points M doivent être situés sur la demi-droite de direction $\overrightarrow{GA}$ et qui part du point G. Cette demi-droite est représentée par la droite (GA') où A' est le symétrique de A par rapport à G.

L'ensemble de points M cherché est donc la demi-droite (GA').



Exercice 17 :

1. Puisque E est le milieu de [AB], on peut exprimer son vecteur comme la moyenne des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

De même, on a $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AE} = \vec{0}$. Donc E est barycentre des points A et B avec des coefficients non nuls, et on peut l'exprimer comme tel :

$$E = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

2. Pour démontrer que G, C, et E sont alignés, il suffit de montrer que la droite (GC) passe par E. Or, on peut exprimer les coordonnées de G en fonction de celles de A, B, et C :

$$x_G = \frac{1}{11}(-2x_A - 2x_B + 15x_C)$$

$$y_G = \frac{1}{11}(-2y_A - 2y_B + 15y_C)$$

On peut exprimer les coordonnées de E en fonction de celles de A et B :

$$x_E = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

$$y_E = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

On dit que G, C, et E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si la droite (GC) passe par E.

La pente de la droite (GC) est donnée par :

$$m_{GC} = \frac{y_C - y_G}{x_C - x_G}$$

En utilisant les expressions précédentes, on trouve :

$$m_{GC} = \frac{11y_C + 4y_A + 4y_B}{11x_C + 4x_A + 4x_B}$$

On doit donc vérifier que le point E se trouve sur cette droite, c'est-à-dire que :

$$y_E - y_C = m_{GC}(x_E - x_C)$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{y_A + y_B}{2} - y_C = \frac{11y_C + 4y_A + 4y_B}{11x_C + 4x_A + 4x_B} \cdot \left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_C \right)$$

En développant :

$$11y_A + 11y_B - 22y_C$$

$$= 4y_A x_C - 4y_A x_B + 4y_B x_C - 4y_B x_A + 11x_C y_C - 11y_C x_C + 4x_A y_C - 4x_B y_C$$

On peut réarranger les termes en séparant les x et les y pour obtenir :

$$(11y_C - 4x_A) x + (11x_C - 22y_C + 4y_A + 4y_B) y$$

$$= 11y_A x + 11y_B x - 4y_A x_B - 4y_B x_A$$

On peut reconnaître une équation de droite de la forme $y = kx + p$, où k est la pente donnée précédemment et p est l'ordonnée à l'origine de la droite. On a donc :

$$k = \frac{11x_C - 22y_C + 4y_A + 4y_B}{11y_C - 4x_A}$$

$$p = \frac{11y_A + 11y_B - 4y_A x_B - 4y_B x_A}{11y_C - 4x_A}$$

On doit maintenant vérifier que le point E se trouve sur cette droite, c'est-à-dire que :

$$y_E = kx_E + p$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{11x_C - 22y_C + 4y_A + 4y_B}{11y_C - 4x_A} \times \frac{x_A + x_B}{2} + \frac{11y_A + 11y_B - 4y_A x_B - 4y_B x_A}{11y_C - 4x_A}$$

En développant :

$$\begin{aligned} 22y_A + 22y_B - 11y_A x_B - 11y_B x_A \\ = 4x_A y_C - 4x_B y_C + 11x_C y_C - 22y_C x_C \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} (22 - 11x_B) y_A + (-11x_A) y_B + (11x_C - 22y_C) (y_A + y_B) \\ = (4x_A - 4x_B + 11x_C) y_C - 22y_C x_C \end{aligned}$$

On peut alors reconnaître une nouvelle équation de droite dans laquelle les coefficients de y_A, y_B, y_C et x_C sont connus, tandis que les coefficients de x_A et x_B sont inconnus :

$$\begin{aligned} (22 - 11x_B) y_A + (-11x_A) y_B + (11x_C - 22y_C) y_C \\ = (4x_A - 4x_B + 11x_C) y_C - 22y_C x_C \end{aligned}$$

On peut voir que cette équation est vérifiée lorsque A et B sont choisis de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires.

Dans tous les autres cas, cette équation n'est pas vérifiée, ce qui prouve que E ne se trouve pas sur la droite (GC) et donc que G, C et E ne sont pas alignés.

3. Étant donné que G, C et E ne sont pas alignés, C ne peut être le milieu de [EG].

Exercice 18 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 cm.

1) Placer, en justifiant, le barycentre Z de (A ; 1), (B ; 3) et (C ; - 3).

z existe car $1+3-3=1 \neq 0$

$$\overrightarrow{ZA} + 3\overrightarrow{ZB} - 3\overrightarrow{ZC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{ZA} + 3\overrightarrow{ZA} + 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{ZA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{ZA} + 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{ZA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

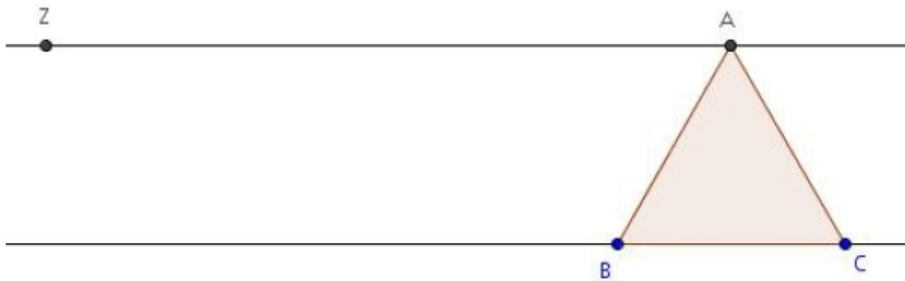
$$\begin{aligned}\overrightarrow{ZA} + 3\overrightarrow{CB} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{ZA} &= -3\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{ZA} = 3\overrightarrow{BC}$$

2) Montrer que les droites (AZ) et (BC) sont parallèles.

D'après précédemment, $\overrightarrow{ZA} = 3\overrightarrow{BC}$.

Ces vecteurs étant colinéaires, nous avons donc (AZ) parallèle à (BC).



Exercice 19 :

Indication : utiliser le fait que G est l'isobarycentre du système $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$

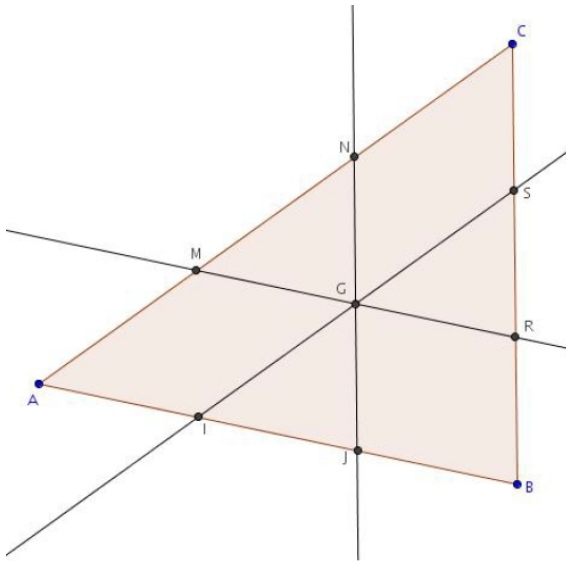
et utilisez l'associativité du barycentre.

ABC est un triangle de centre de gravité G.

On note I, J, M, N, R et S les points définis par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AN} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Démontrer que les droites (IS), (MR) et (NJ) sont concourantes en G.



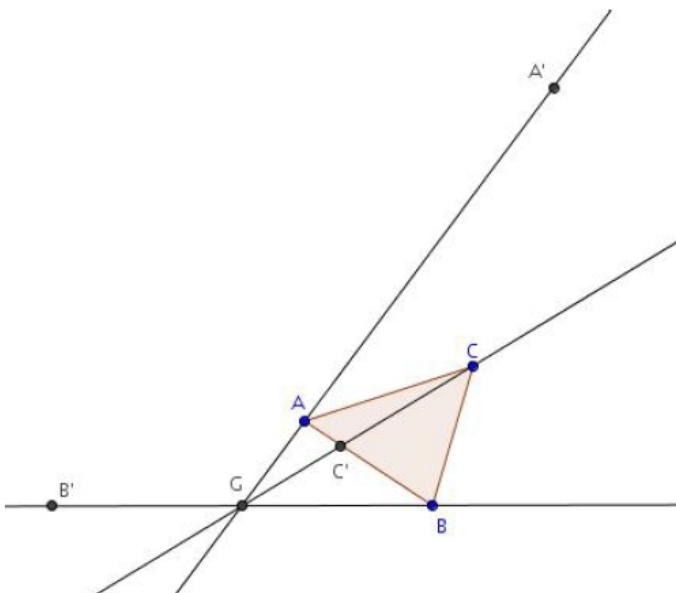
Exercice 20 :

Indication : on pourra considérer le barycentre G de $(A ; 5)$, $(B ; 2)$ et $(C ; -3)$.

ABC est un triangle.

On considère le barycentre A' de $(B ; 2)$ et $(C ; -3)$, le barycentre B' de $(A ; 5)$ et $(C ; -3)$ et le barycentre C' de $(A ; 5)$ et $(B ; 2)$.

Démontrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.



Exercice 21 :

ABC est un triangle. Soit G le barycentre de (A ; 1), (B ; 3) et (C ; - 3).

Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

Tout d'abord le barycentre G existe car $1+3-3=1 \neq 0$.

Nous avons :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Utilisons la relation de Chasles :

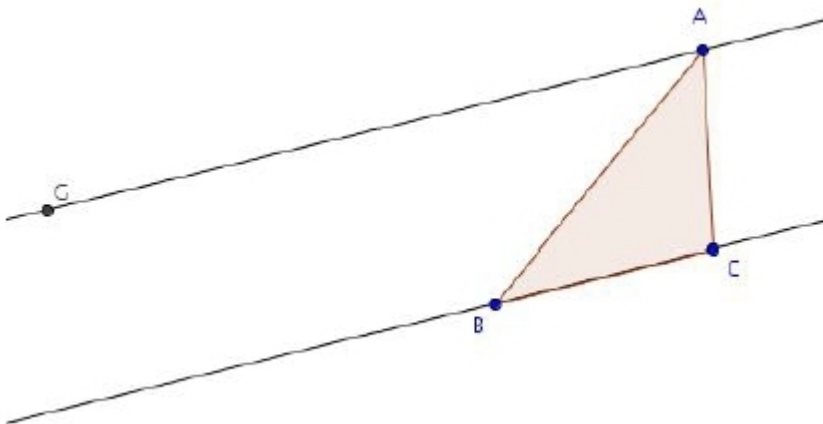
$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{BC}$$

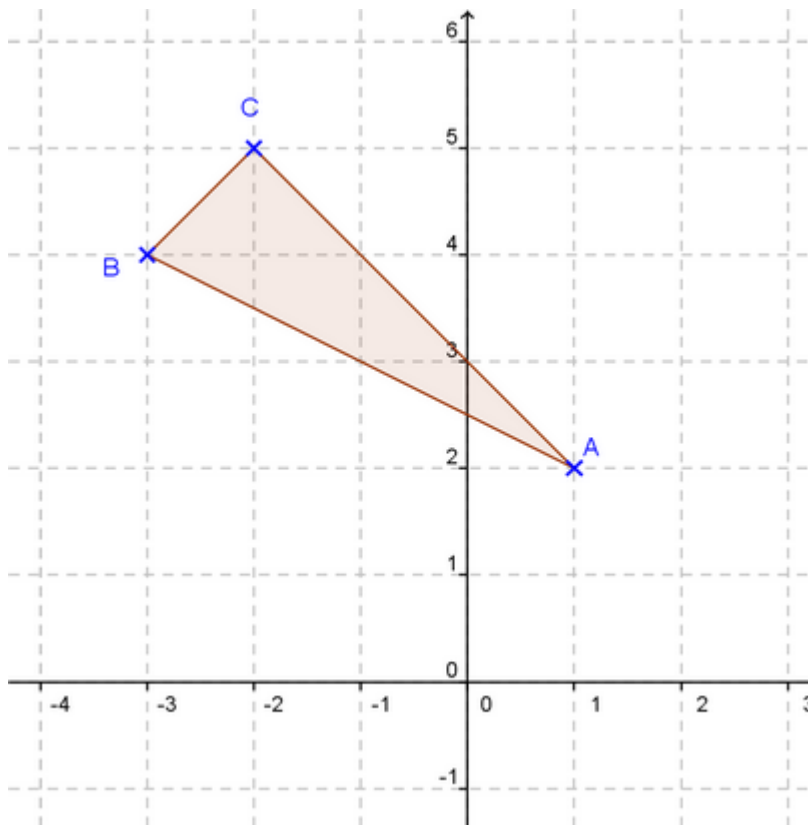
Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires ainsi

les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

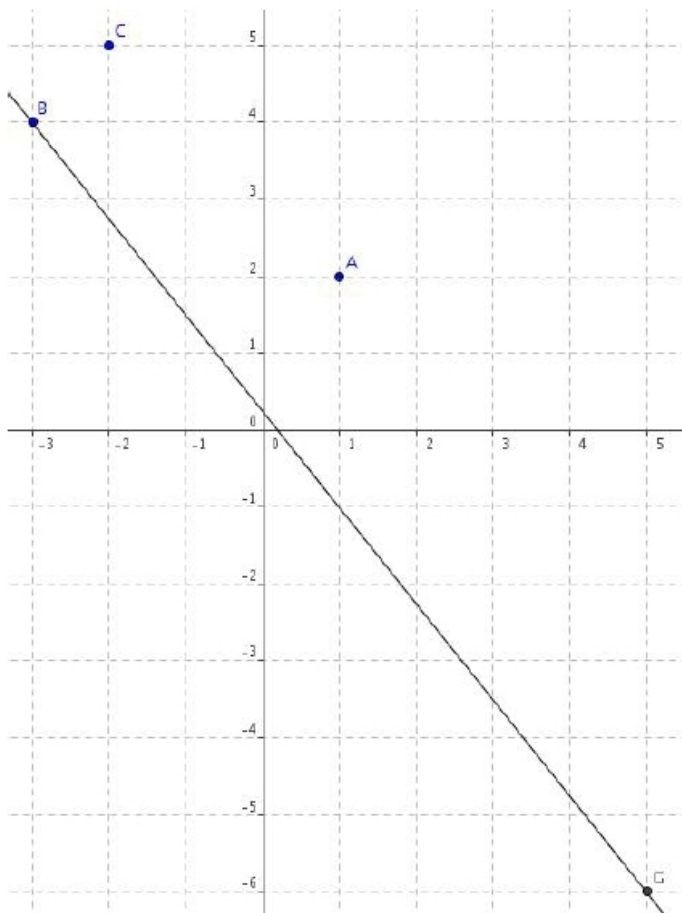


Exercice 22 :

1. Placer dans un repère les points A(1 ; 2), B(- 3 ; 4) et C(- 2 ; 5).
Soit G le barycentre des points pondérés (A ; 3), (B ; 2) et (C ; - 4).



2. Quelles sont les coordonnées de G? Placer G.
3. La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ? Justifier.



Exercice 23 :

$[AB]$ est un segment de longueur 10 cm et $G \in \{(A; 2), (B; 3)\}$

1. Développez et réduisez $2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$

$$= 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 + 4\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB}$$

2. Démontrez alors que pour tout point M du plan on a $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + 120$

3. Déterminez alors et **représentez l'ensemble des points M du plan** tels que $2MA^2 + 3MB^2 = 245$

Exercice 24 :

Indication : utiliser la définition et les propriétés du barycentre.

A, B et C sont 3 points du plan non alignés et k un nombre réel quelconque.

I $\in$ $\{(B; 1), (C; 2)\}$ et G le barycentre de (A, k), (B, 1-k) et (C, 2)

1. Exprimer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$.

2. Simplifier l'expression obtenue au 1. et en déduire l'ensemble (E) des points G lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

3. Représentez graphiquement (E) dans le cas $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $AC = 5,5 \text{ cm}$

Exercice 25 :

Conseil : ne vous compliquez pas la vie avec des calculs infernaux, utilisez plutôt astucieusement

l'associativité barycentrique .

A, B, C et D sont quatre points distincts.

On note K le barycentre de (A, 3) (B, 1), J le milieu de [DC], G le centre de gravité de BCD et I le milieu de [AG].

Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 26 :

Indications : utiliser les propriétés du barycentre et l'associativité.

ABC un triangle ; à tout réel m , on associe le point G_m barycentre de (A ; 2) ; (B ; m) et (C ; $-m$).

On note O le milieu de [BC].

1. Expliquer pourquoi G_m existe toujours et démontrer que, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, G_m décrit une droite D que vous préciserez.

2. a) Construisez G_2 et G_{-2} . Avec $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$ >

b) On suppose m différent de 2 et -2.

Soit G_m un point de D distinct de A, G_2 et G_{-2} .

Démontrer que (BG_m) coupe (AC) en un point noté I et que (CG_m) coupe (AB) en un point noté J. >

3. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, >

calculez en fonction de m les coordonnées de I et J. >

Déduisez-en que les points O, I et J sont alignés. >

(On pourra utiliser la condition analytique de colinéarité de 2 vecteurs) >

Exercice 27 :

Indication : utiliser le fait que le centre de gravité est un isobarycentre puis l'associativité du barycentre.

Soit ABC un triangle, A', B', et C' les milieux des côtés opposés à A, B et C respectivement, M un point donné.

On note A₁, B₁ et C₁ les symétriques du point M par rapport à A', B', et C'.

On désigne par M' barycentre des points (A, 1) (B,1) (C,1) et (M,-1)

1. Montrer que les droites (AA₁) ; (BB₁) et (CC₁) sont concourantes en M'. >

2. Soit G le centre de gravité de ABC. Montrer que M', M et G sont alignés et préciser la position de M' sur la droite (MG). >

Exercice 28 :

ABCD est un carré.

1. Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = AB$$

Notons $G = \text{bary}\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$

G existe car $2-1+1 = 2 \neq 0$

$$|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = AB$$

$$|2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}| = AB$$

$$|2\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = AB$$

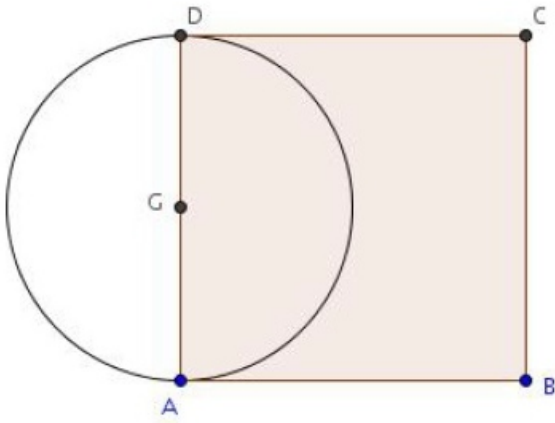
$$|2\overrightarrow{MG} + \vec{0}| = AB \text{ car } G = \text{bary}\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$$

$$2|\overrightarrow{MG}| = AB$$

$$|\overrightarrow{MG}| = \frac{AB}{2}$$

Conclusion : l'ensemble de points recherché est le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{2}$.

2. Représenter cet ensemble E.



Exercice 29 :

Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; - 1), (C ; 2) et (D ; 1).

On note I le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; - 1), et J celui de (C ; 2) et (D ; 1).

1. Placer I et J en justifiant.

Tout d'abord les barycentre I et J existent car $2-1=1 \neq 0$ et $2+1=3 \neq 0$.

$$2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$$

Conclusion : I est le symétrique du point A par rapport à B ou A est le milieu de [IB].

$$2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{JC} = -\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

Conclusion : J est situé aux un tiers de [CD] en partant de C.

2. Réduire l'écriture des vecteurs suivants :

$$2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} \text{ et } 2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}.$$

$$2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{KI} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{KI}$$

et

$$2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{KJ} + 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JD} = 3\overrightarrow{KJ}$$

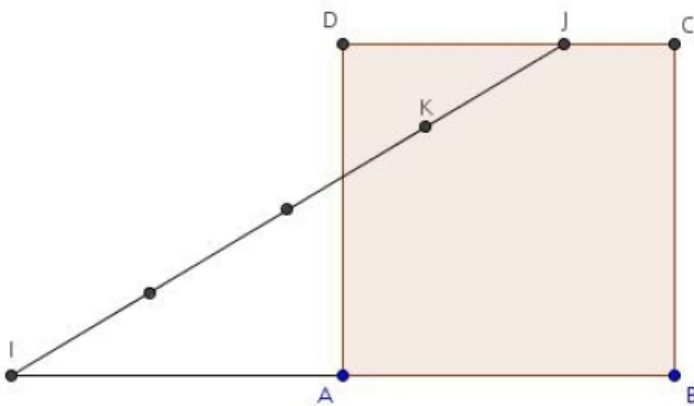
En déduire que K est le barycentre de (I ; 1) et (J ; 3).

prenons une des deux égalités :

$$2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KI}$$

$$2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KI} = \vec{0}$$

donc K est le barycentre de (I ; 1) et (J ; 3).



Exercice 30 :

Soit ABC un triangle et G un point vérifiant :

$$\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Le point G est-il le barycentre des points pondérés (A ; 5), (B ; 1) et (C ; 3) ? Justifier.

$$\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

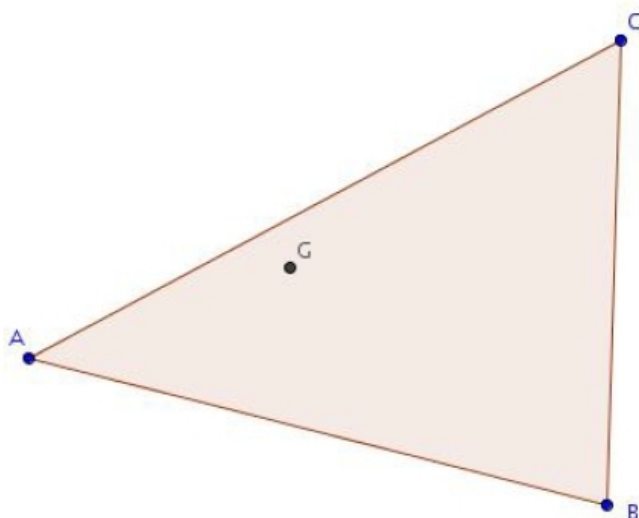
$$-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Multiplions cette égalité vectorielle par - 1 .

$$5\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$G = \text{bary}\{(A;5), (B;1), (C;3)\}$$



Exercice 31 :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

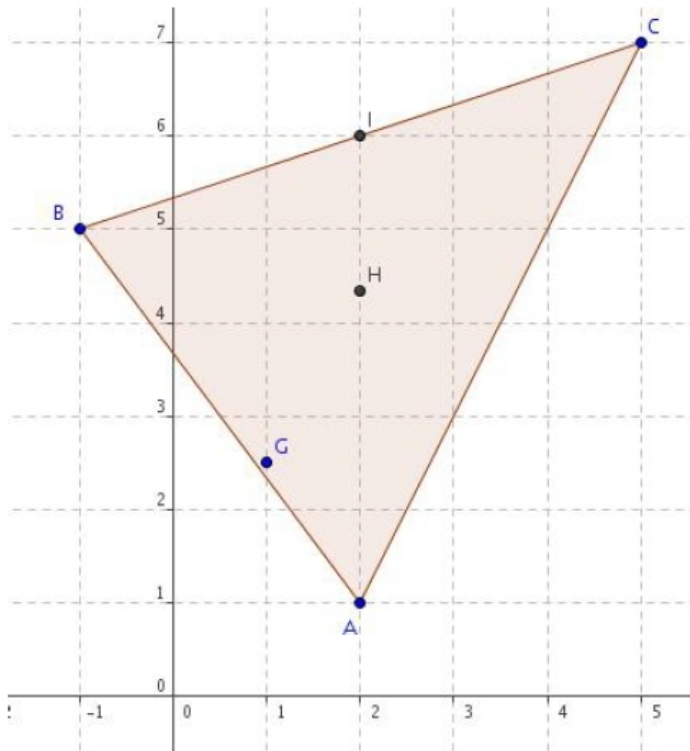
1. Placer les points $A(2; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(5; 7)$ et $G(1; \frac{5}{2})$.

2. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points B et C.

3. Déterminer les coordonnées du centre de gravité H du triangle ABC.

indication : utiliser le fait que H est le barycentre de (A,1) (B,1) (C,1)

4. Existe-t-il un réel k tel que G soit barycentre de (A ; 1) et (B ; k) ? Justifier.



Exercice 32 :

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 8$ cm et $BA = 5$ cm. Soit I le milieu de [BC].

1. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera.

Indication : insérer le Point F dans le vecteur $\overrightarrow{BA}$ puis transposer le tout dans le premier membre.

2. P étant un point du plan, réduire chacune des sommes suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} \\ &-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} \\ &2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA} \end{aligned}$$

3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

Indication : considérer le barycentre de (B,1) (C,1) et le barycentre de (A,-1) (B,2)

$$\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \right| = \left| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right|$$

4. Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}| = |2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA}|$$

