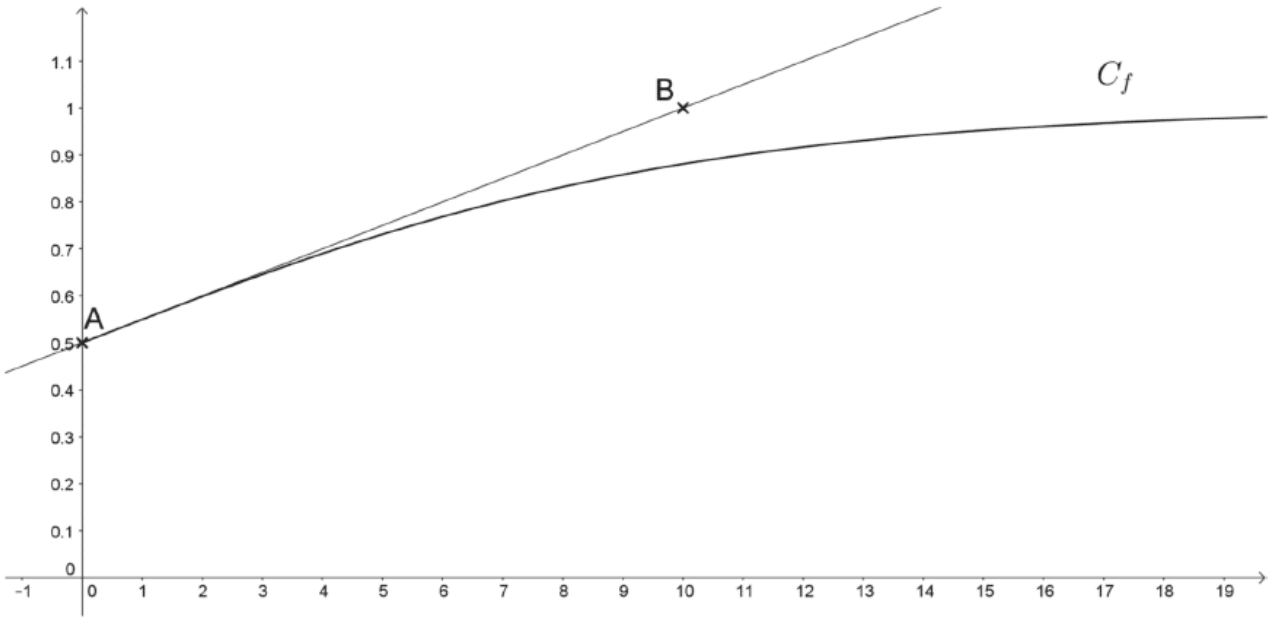
Bac S 2019 Antilles Guyane

B A C C A L A U R É A T G É N É R A L
SESSION 2019
MATHÉMATIQUES
Série : S
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures. – COEFFICIENT : 7

Exercice 1 : (6 points)
Commun à tous les candidats
Partie A
Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction définie sur [0 ; +∞[par

$$f(x) = \frac{a}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}$$

La courbe Cf représentant la fonction dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe Cf passe par le point A(0 ; 0,5).
La tangente à la courbe Cf au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que a = 1.

On obtient alors, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur [0 ; +∞[et on note f ' sa fonction dérivée.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur [0 ; +∞[par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$$

Le réel représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre p(x) modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, p(0) est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et p(3,5) est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

2.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur [0 ; +∞[.

b. Calculer la limite de la fonction p en +∞.

c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2}\int_8^{10} p(x)\,\mathrm{d}x$$

a.

Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$p(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$$

b. En déduire une primitive de la fonction p sur [0 ; +∞[.

c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.

Exercice 2 : (5 points)

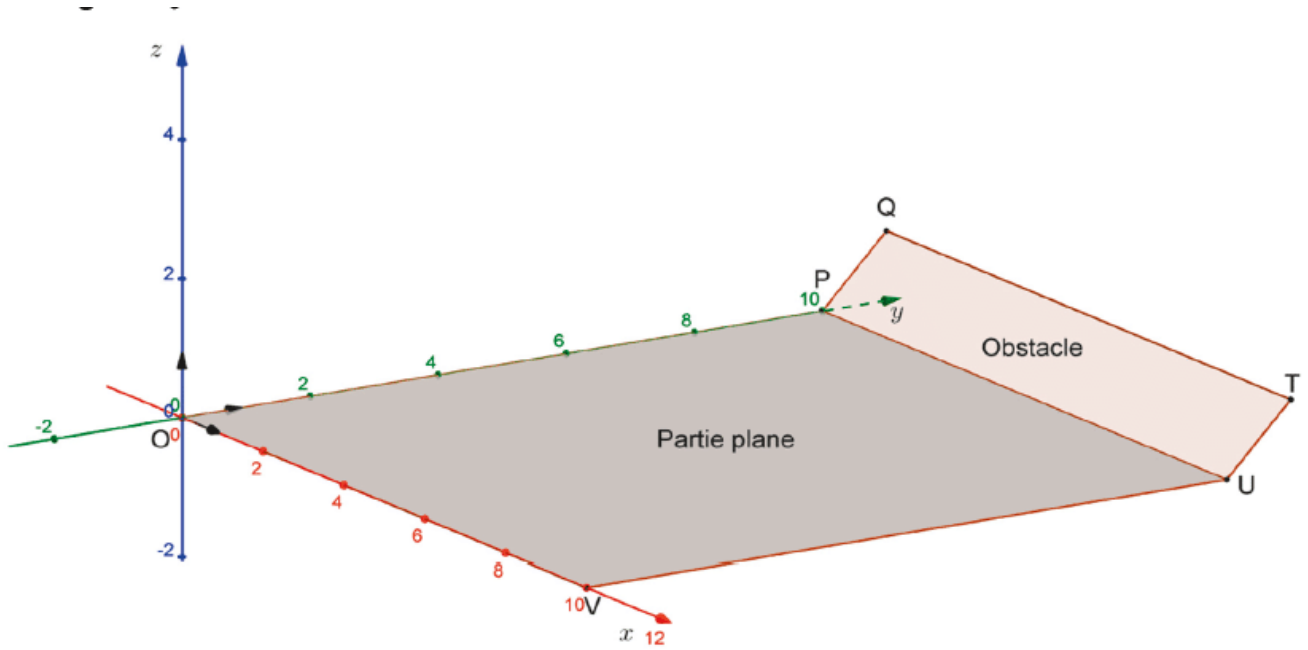
Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par
leurs coordonnées dans ce repère :

O(0 ; 0 ; 0), P(0 ; 10 ; 0), Q(0 ; 11 ; 1), T(10 ; 11 ; 1), U(10 ; 10 ; 0) et V(10 ; 0 ; 0)
La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :
• le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75) ;
• le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2.
a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(0,;,1,;,-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $(2;\frac{37}{3};\frac{7}{3})$.
4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires
Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.
L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.
Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).
Il existe alors deux réels a et b tels que $\vec{AM} = a\vec{AB}$ et $\vec{CN} = b\vec{CD}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\vec{MN}$ sont (2 − 2b ; 2 − 2a ; −0,5a).
2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et b = 1.
3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

Exercice 3 : (4 points)

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Commun à tous les candidats
Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le nombre complexe $c = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et les points S et T d'affixes respectives c^2 et $\frac{1}{c}$.
1. **Affirmation 1 :**
Le nombre c peut s'écrire $c = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$.
2. **Affirmation 2 :**
Pour tout entier naturel n, c^{3n} est un nombre réel.
3. **Affirmation 3 :**
Les points O, S et T sont alignés.
4. **Affirmation 4 :**
Pour tout entier naturel non nul n, $|c|, +, |c^2|, +, ..., +, |c^n|, =, 1 - (, \frac{1}{2},)^n$.

Exercice 4 : (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A
Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.
On dispose des informations suivantes :
• 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
• un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
• 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les événements :
• M : « le téléspectateur a regardé le match » ;
• E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».
On note la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.
1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Déterminer la probabilité de $M \cap, E$.
3. a. Vérifier que $P(E), =, 0, 44x, +, 0, 14$.
b. En déduire la valeur de x .
4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

Partie B
Pour déterminer l'audience des chaînes de télévision, un institut de sondage recueille, au moyen de boîtiers individuels, des informations auprès de milliers de foyers français.
Cet institut décide de modéliser le temps passé, en heure, par un téléspectateur devant la télévision le soir du match, par une variable aléatoire T suivant la loi normale d'espérance $\mu, =, 1, 5$ et d'écart-type $\sigma, =, 0, 5$.
1. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un téléspectateur ait passé entre une heure et deux heures devant sa télévision le soir du match ?
2. Déterminer l'arrondi à 10^{-2} du réel t tel que $P(, T \geq, t,), =, 0, 066$.
Interpréter le résultat.

Partie C

La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif.

On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur [0; +∞[par
$f(x) = \lambda, e^{\lambda,x}$

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans.

L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans.

L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

Consulter le corrigé en ligne

Vous pouvez télécharger le sujet du bac S de maths 2019 aux Antilles et Guyane au format PDF.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.