Arithmétique

EXERCICE 1 - ARITHMÉTIQUE EN TERMINALE

1-Etablir que pour tout$(a, b, q) \in \mathbb{Z}^3, pgcd(a, b) = pgcd(b, a - bq)$
2-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}, pgcd(5n^3 - n, n + 2) = pgcd(n + 2, 38)$

EXERCICE 2 - DÉMONTRER QU'UN ENTIER EST DIVISIBLE PAR 3

n designe un nombre entier naturel.
Demontrer que n(n+2)(n+4) est divisible par 3.

EXERCICE 3 - DÉMONTRER LA PROPRIÉTÉ SUIVANTE :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, alors on a :
PGCD(a ;b)×PPCM(a ;b) = a × b.

On admettra la propriété suivante :

Si a’ et b’ sont deux entiers naturels premiers entre eux alors PPCM(a’ ;b’) = a’×b’.

EXERCICE 4 - SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3 \times ppcm(a; b) = ab. \end{cases}$$

EXERCICE 5 - MONTRER QU'UN ENTIER N'EST JAMAIS UN NOMBRE PREMIER

On désigne par a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
1) Développer le carré $(a^2 + 2b^2)^2$.
2) En déduire que l’entier naturel $a^4 + 4b^4$ n’est jamais un nombre premier.

EXERCICE 6 - CONGRUENCES

(a) Transformer 235 en écriture en base 2.
(b) Transformer $\overline{101101}^2$ en écriture en base 10.
(c) Transformer 65 en écriture en base 5.
(d) Transformer $\overline{231}^7$ en écriture en base 2.

EXERCICE 7 - DIFFÉRENCE DE CUBE

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,on a $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
2. résoudre l'équation $x^3 - y^3 = 127$ où les inconnues sont des entiers naturels .

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

EXERCICE 8 - THÉORÈME DE LA DIVISION EUCLIDIENNE DANS Z

On note $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$.
D'après le théorème de la divison euclidienne dans $\mathbb{Z}$,
il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que :
$a = bq + r \, et \, 0 \leq r \leq |b|$.
Démontrer que le couple (q,r) est unique .

EXERCICE 9 - PROBLÈME SUR LES RACINES CARRÉES

On note $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n soit le carré d'aucun entier.
Rappel : tout entier naturel admet une décomposition unique en produit de facteurs premiers .
On suppose que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et donc qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$
tels que $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ avec pgcd(p,q)=1.
1. Exprimer p^2 en fonction de n et q .
2. Que peut-on dire des exposants des facteurs premiers figurant dans la décomposition de n ?
3. Conclure .
4. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

EXERCICE 10 - SOMME À CALCULER

On note $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{x^{2^k} + 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}} - 1} .$$

EXERCICE 11 - CALCUL D'UNE SOMME

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$.

EXERCICE 12 - PUISSANCE, ARITHMÉTIQUE ET RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

On note x un réel positif .
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

EXERCICE 13 - CONTRAPOSÉE ET RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

On note $n \in \mathbb{N}^*$.
Le but de cet exercice est de montrer par contraposition la propriété suivante :
Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors l'entier n est pair .
1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente .
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$
avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 2, 3\}$ (à justifier).Prouver la contraposée .
3. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 14 - MULTIPLE D'UN NOMBRE

Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3 .

EXERCICE 15 -RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

1. Développer, réduire et ordonner $(n+1)^5$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multpile de 5 .

EXERCICE 16 -SOMME DES CUBES

1. Montrer que Invalid Equation .
2. En déduire la valeur de $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3$.

EXERCICE 17 -MULTIPLE D'UN NOMBRE

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.

EXERCICE 18 -BAC S SPÉCIALITÉ ET ARITHMÉTIQUE

Soit n un entier naturel .

1. trouver suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13 .
2. En déduire que $1981^{1981} - 5$ est divisible par 13.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N =$ est divisible par 13 .

EXERCICE 19 - PROBLÈME SUR L'ARITHMÉTIQUE

Soit n un entier relatif et $a = 5n^3 + n$. Montrer que a est divisible par 3.

EXERCICE 20

Soit n un entier naturel

Montrer que $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

EXERCICE 21

Soit p un nombre entier naturel impair. Montrer que la somme de p entiers naturels consécutifs est un multiple de p.

EXERCICE 22

Indice : Théorème de Bézout

Soit x un réel. Montrer que si x^7 et x^{12} sont des nombres rationnels, alors x l'est également.

EXERCICE 23

Indice: Lemme de Gauss

Résoudre dans N* l'équation : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$

EXERCICE 24

Soit n un entier naturel

EXERCICE 25 - NOMBRES DE MERSENNE

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombre de la forme : $M_n = 2^n - 1$ dits nombres de Mersenne.

1. Montrer que M_2, M_3, M_5, M_7 sont des nombres premiers.
2. Montrer que si p est un diviseur de n, alors M_n est divisible par $2^p - 1$.

En déduire que si M_n est un nombre premier alors n l'est également.

3. Etudier la réciproque.

EXERCICE 26

Trouver tous les couples (a,b) d'entiers naturels vérifiant : ppcm(a,b) = 40 et a+b=60

EXERCICE 27

Soit a et b deux entiers naturels.

Montrer que si pgcd(a,b) = 1 alors pgcd(a,b²) = 1

EXERCICE 28

Soit n un entier naturel impair,

Montrer que parmi (n-1)²+1 entiers, il en existe n dont la somme est un multiple de n.

EXERCICE 29

Soit n un entier naturel

1. Démontrer que n²+5n+4 et n²+3n+2 sont divisibles par (n+1)
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles 3n²+15n+19 est divisible par n+1
3. En déduire que pour tout entier naturel n, 3n²+15n+19 n'est pas divisible par n²+3n+2

EXERCICE 30 - NOMBRES DE FERMAT .

Soit n un entier naturel .

a. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2

b. On pose $Fn = 2^{2^n} + 1$(nombres de Fermat). Montrer que les F_n sont deux à deux premiers entre eux.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

VOIR LE CORRIGÉ DE
CES EXERCICES