

Arithmétique et décomposition en facteurs premiers

Exercice 1 :

Les trois divisions euclidiennes ci-dessous sont exactes.

$$\begin{array}{r|l} 368 & 15 \\ 8 & 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 16 \\ 0 & 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 14 \\ 4 & 26 \end{array}$$

1. Uniquement 23 est un diviseur de 368 car le reste est nul.
2. Le plus petit multiple de 15 supérieur à 368 est $25 \times 15 = 375$.
3. Le plus grand multiple de 14 inférieur à 368 est $26 \times 14 = 364$.

Exercice 2 :

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
475	16	29	11
9957	23	432	21
456	41	11	5
781	27	28	25
935	17	55	0

Les divisions euclidiennes correspondantes sont :

- $475 = 16 \times 29 + 11$;
- $9\,957 = 23 \times 432 + 21$;

- $456 = 41 \times 11 + 5$;
- $781 = 27 \times 28 + 25$;
- $935 = 17 \times 55 + 0$

Exercice 3 :

Un centre aéré accueillant 131 enfants organise une journée "Sport Co" avec du basket, du hand-ball, du football et du rugby.

Pour chaque sport, combien peut-on constituer d'équipes?

Combien d'enfants seront sans équipe ?



$$131 = 32 \times 4 + 3.$$

On peut construire 32 équipes et 3 enfants seront sans équipe.

Exercice 4 :

Ecrire la liste des diviseurs des nombres suivants : 16; 20; 36; 90; 59; 33.

Diviseurs de 16 : 1, 2, 4, 8, 16.

Diviseurs de 20 : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Diviseurs de 59 : 1, 59.

Exercice 5 :

Compléter le tableau ci-dessous.

Le nombre ci-dessous est divisible par...		2	3	4	5	9	10
a.	5 912	●		●			
b.	34 200	●	●	●	●	●	●
c.	54 208	●		●			
d.	317						
e.	708	●	●	●			
f.		non	oui	non	non	non	non
g.		oui	oui	non	non	oui	non
h.		oui	oui	oui	oui	oui	oui
i.		non	non	non	non	non	non

Exercice 6 :

1. Démontrer que la somme de deux entiers positifs consécutifs et impairs est un multiple de 4.

Soit $n=2k+1$ (avec k un nombre entier positif) un nombre impair positif alors l'entier positif impair consécutif est $n'=2k+3$.

$n+n'=2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)=4K$ avec $K=k+1$ donc la somme de deux entiers consécutifs et impairs est un multiple de 4.

2. Démontrer qu'un multiple de 8 est également un multiple de 4.

Soit $n=8k$ (avec k un entier positif) un multiple de 8 alors $n=4 \times (2k)=4K$ avec $K=2k$ donc n est aussi un multiple de 4.

Exercice 7 :



Nori souhaite faire des paquets de billes, en répartissant intégralement ses 90 billes rouges et 150 billes noires. Le contenu de chaque paquet doit être identique.

Combien de paquets pourra-t-il réaliser?

Trouver les différentes possibilités.

Peut-il y avoir 9 paquets? 30 paquets?

Il ne peut pas il y avoir 9 paquets car 150 n'est pas divisible par 9.

Il peut y avoir 30 paquets car 150 et 90 sont divisibles par 30.

Donner la liste des diviseurs de 90 puis de 150.

Diviseurs de 90 :1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90

Diviseurs de 150 :1,2,3,5,6,10,15,25,30,50,75,150

Quelles sont les différentes possibilités pour le nombre de paquets ?

Les possibilités sont 1,2,3,5,6,10,15,30.

Exercice 8 :

Donner la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 50.

La liste est 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Exercice 9 :

Utiliser les égalités ci-dessous pour écrire les décompositions en facteurs premiers

des nombres proposés.

$$a. 36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$$

$$b. 18375 = 3 \times 125 \times 49 = 3 \times 5^3 \times 7^2$$

$$c. 3872 = 32 \times 121 = 2^5 \times 11^2$$

$$d. 1183 = 91 \times 13$$

$$e. 214375 = 625 \times 343 = 5^4 \times 7^3$$

Exercice 10 :

Ecrire la décomposition en facteurs premiers des nombres entiers suivants :

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$63 = 3^2 \times 7$$



$$3672 = 2^3 \times 3^3 \times 17$$

$$416 = 2^5 \times 13$$

$$24000 = 2^6 \times 3 \times 5^3$$

Exercice 11 :

Trouver le nombre recherché.



Je suis un nombre premier compris entre 100 et 150. La différence entre mon chiffre des unités et mon chiffre des centaines est le double de mon chiffre des dizaines.

Les solutions sont 101; 113; 137 et 149.

Exercice 12 :

Utiliser les décompositions en facteurs premiers pour rendre ces fractions irréductibles.



Rendre irréductibles les fractions suivantes : $\frac{504}{4400}, \frac{504}{11466}, \frac{13500}{504}$.



Exercice 13 :

Rendre irréductible les fractions suivantes : $\frac{8800}{1638}, \frac{64}{4400}, \frac{1260}{1638}, \frac{1638}{810}$.

$$\frac{8800}{1638} = \frac{4400}{819}, \frac{64}{4400} = \frac{4}{275}, \frac{1260}{1638} = \frac{10}{13}, \frac{1638}{810} = \frac{91}{45}$$

Exercice 14 :

je possède plus de 400 cd mais moins de 450. Que je les groupe par 2, par 3 , par 4 ou par 5, c'est toujours la même chose: il en reste un tout seul.

Combien Nori a-t-il de cd ?

Nous cherchons un nombre impair et qui se termine par 1.

Il y a 421 cd.

Exercice 15 :

1. Calculer le PGCD de 110 et de 88.

$$\text{PGCD}(110 ; 88) = 22$$

2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur.

Il a reçu la consigne suivante :

« Découper dans ces plaques des carrés, tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte . »

Quelle sera la longueur du côté du carré ?

La longueur du côté du carré sera 22 cm

3. Combien obtiendra-t-on de carrés par plaque ?

$$110:22=5 \text{ et } 88:22=4$$

$$5 \times 4 = 20$$

Il y aura 20 carrés.

Exercice 16 :

1. Calculer le PGCD de 114 400 et 60 775.

$$\text{PGCD}(114400 ; 60775) = 3575$$

2. > Expliquer comment, sans utiliser la touche « fraction » d'une calculatrice, rendre irréductible la fraction

en divisant par le pgcd (114 400; 60 775)

3. Donner l'écriture simplifiée de

$$\frac{60775}{114400} = \frac{60775:3575}{114400:3575} = \frac{17}{32} .$$

Exercice 17 :

Soient les nombres $A = \frac{117}{63}$ et $B = -\frac{8}{7}$.

1. Expliquer pourquoi la fraction A n'est pas irréductible.

117 et 63 sont divisibles par 3 donc leur pgcd est différent de 1 donc la fraction est réductible.

2. Simplifier cette fraction pour la rendre irréductible.

$$\text{PGCD}(117 ; 63) = 9$$

$$\frac{117}{63} = \frac{117:9}{63:9} = \frac{13}{7}$$

3. Montrer, en indiquant les étapes de calcul, que $A - B$ est un nombre entier.

$$A - B = \frac{13}{7} - \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{13}{7} + \frac{8}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

donc $A - B$ est bien un nombre entier.

Exercice 18 :

1. Démontrer que les nombres 65 et 42 sont premiers entre eux.

$\text{PGCD}(65 ; 42) = 1$ donc ces deux entiers sont bien premiers entre eux.

2. Démontrer que $\boxed{x} = \frac{65}{42}$.

$$\text{PGCD}(520 ; 336) = 8$$

$$\frac{520}{336} = \frac{520:8}{336:8} = \frac{65}{42}$$

Exercice 19 :

1. Déterminer le PGCD de 108 et 135.

$$\text{PGCD}(135 ; 108) = 27$$

2. Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires.

Il veut faire des paquets de sorte que :

- tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges ;
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires ;
- toutes les billes rouges et les billes noires soient utilisées.

a. Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?

Il pourra réaliser au maximum 27 paquets.

b. Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

$$108:27=4 \text{ billes rouges}$$

$$135:27=5 \text{ billes noires.}$$

Exercice 20 :

1. Calculer le PGCD de 1 756 et 1 317 (on détaillera les calculs nécessaires).

$$\text{PGCD}(1756 ; 1317) = 439$$

2. Un fleuriste a reçu 1 756 roses blanches et 1 317 roses rouges.

Il désire réaliser des bouquets identiques

(c'est à dire comprenant un même nombre de roses et la même

répartition entre les roses blanches et les rouges) en utilisant toutes les fleurs.

a. Quel sera le nombre maximum de bouquets identiques ? Justifier clairement la réponse.

Il pourra créer au maximum 439 bouquets identiques.

b. Quel sera alors la composition de chaque bouquet ?

$$1756:439=4 \text{ roses blanches.}$$

$$1317:439=3 \text{ roses noires.}$$

Exercice 21 :

1) Montrer que $\text{PGCD}(578 ; 408) = 34$



Montrer que $\text{PGCD}(2499 ; 1911) = 147$

$$\frac{2499}{1911} = \frac{2499:147}{1911:147} = \frac{17}{13}$$

2) Montrer que $\text{PGCD}(252 ; 144) = 36$.

a. Cette association peut former au maximum 36 équipes.

b. $144 : 36 = 4$ et $252 : 36 = 7$

Il y a 4 filles et 7 garçons par équipe.

Exercice 23 :

1. Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

Ce sont deux entiers pairs donc ils ne peuvent pas être premiers entre eux car leur pgcd sera supérieur ou égale à 2.

2. Calculer le plus grand diviseur commun (PGCD) de 682 et 352.

Utilisons l'algorithme d'Euclide.

$$682 = 1 \times 352 + 330$$

$$352 = 1 \times 330 + 22$$

$$330 = 15 \times 22 + 0$$

$$\text{Donc pgcd}(352 ; 682) = 22$$

3. Rendre irréductible la fraction $\frac{682}{352}$

en indiquant clairement la méthode utilisée.

En divisant le numérateur et le dénominateur par le pgcd, nous obtenons une fraction qui est irréductible.

$$\frac{682}{352} = \frac{682:22}{352:22} = \frac{31}{16}$$

Exercice 24 :

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :

$$A = .$$

$$A = \frac{35}{12}$$

$$\frac{B}{B} =$$

Exercice 25 :

Calculer et donner le résultat en notation scientifique :

$$C = 15 \times (10^7)^2 \times 3 \times 10^{-5} = 15 \times 3 \times 10^7 \times 2^{-5} = 45 \times 10^9.$$

$$C = 4,5 \times 10^{10}$$

Exercice 26 :

1.

Calculer A et donner le résultat sous la forme d'une fraction .

$$A =$$

$$A = \frac{63}{42}$$

2. Ecrire B sous la forme $b\sqrt{3}$ où b est un nombre entier .

$$B =$$

$$B =$$

$$B = 36\sqrt{3}$$

3.

Calculer C et donner l'écriture scientifique du résultat .

$$C =$$

$$C = 1,2 \times 10^3$$

Exercice 27 :

1. Déterminer le PGCD de 288 et 224.

Utilisons l'algorithme d'Euclide.

$$288 = 1 \times 224 + 64$$

$$224 = 3 \times 64 + 32$$

$$64 = 2 \times 32 + 0$$

Le PGCD étant le dernier reste non nul, on en déduit que $\text{pgcd}(288, 224) = 32$

2 . Écrire la fraction $\frac{224}{288}$ sous forme irréductible.

$$\frac{224}{288} = \frac{224:32}{288:32} = \frac{7}{9} \text{ est une fraction irréductible.}$$

3 . Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses oeuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysage et le même nombre de portraits.

Il dispose de 224 photos de paysage et de 288 portraits.

a) Combien peut-il réaliser au maximum de panneaux en utilisant toutes les photos ?

Il pourra réaliser au maximum 32 panneaux.

b) Combien chaque panneau contient-il de photos de paysage et de photos de portraits ?

Chaque panneau contiendra 7 photos de paysage et 9 photos de portraits.



Exercice 29 :

a. 255 et 154 sont-ils premiers entre eux ?

PGCD(255 ; 154)

On utilise l'algorithme d'Euclide

Et on regroupe les résultats dans un tableau.

Dividende	Diviseur	Reste
255	154	101
154	101	53
101	53	48
53	48	5
48	5	3
5	3	2
3	2	1
2	1	0

Or, dans l'algorithme d'Euclide le PGCD est le dernier reste non nul.

$\text{PGCD}(255 ; 154) = 1$ donc ces deux nombres sont premiers entre eux.

b. 609 et 465 sont-ils premiers entre eux ?

$\text{PGCD}(609 ; 465)$

On utilise l'algorithme d'Euclide

Et on regroupe les résultats dans un tableau.

Dividende	Diviseur	Reste
609	465	144
465	144	33
144	33	12

33	12	9
12	9	3
9	3	0

Or, dans l'algorithme d'Euclide le PGCD est le dernier reste non nul.

$\text{PGCD}(609 ; 465) = 3$ donc ces deux nombres ne sont pas premiers entre eux.

c. 11 913 et 7 259 sont-ils premiers entre eux ?

$\text{PGCD}(11913 ; 7259)$

On utilise l'algorithme d'Euclide

Et on regroupe les résultats dans un tableau.

Dividende	Diviseur	Reste
11913	7259	4654
7259	4654	2605
4654	2605	2049
2605	2049	556
2049	556	381
556	381	175
381	175	31
175	31	20
31	20	11
20	11	9

11	9	2
9	2	1
2	1	0

Or, dans l'algorithme d'Euclide le PGCD est le dernier reste non nul.

$\text{PGCD}(11913 ; 7259) = 1$ donc ces deux nombres sont premiers entre eux.

Exercice 30 :

1. Par la méthode d'Euclide :

$$481 = 2 \times 234 + 13$$

$$234 = 18 \times 13 + 0$$

le pgcd étant le dernier reste non nul, on en déduit que $\text{pgcd}(481, 234) = 13$.

Exercice 31 :

1. Par la méthode de l'algorithme d'Euclide:

$$137 = 3 \times 41 + 14$$

$$41 = 2 \times 14 + 13$$

$$14 = 1 \times 13 + 1$$

$$13 = 1 \times 13 + 0$$

le pgcd étant le dernier reste non nul, on en déduit que $\text{pgcd}(137, 41) = 1$.

2. Ces deux entiers sont premiers entre eux car $\text{pgcd}(137, 41) = 1$.

On remarquera que l'algorithme d'Euclide est plus rapide.

Exercice 32 :

1. Il faut donc calculer le pgcd (2 622, 2 530).

Utilisons l'algorithme d'Euclide.

$$2622 = 1 \times 2530 + 92$$

$$2530 = 27 \times 92 + 46$$

$$92 = 2 \times 46 + 0$$

le pgcd étant le dernier reste non nul, on en déduit que $\text{pgcd}(2622, 2530) = 46$.

Il y aura donc dans chaque paquet 46 oeufs et 46 poissons.

2. Dans un paquet il y a donc $2 \times 46 = 92$ éléments et au total on a $2\,622 + 2\,530 = 5\,152$ éléments.

Il y aura donc 56 paquets ($5\,152 : 92 = 56$).

Exercice 33 :

1. 1. Il faut donc calculer le pgcd (161,133).

Utilisons l'algorithme d'Euclide.

$$161 = 1 \times 133 + 28$$

$$133 = 4 \times 28 + 21$$

$$28 = 1 \times 21 + 7$$

$$21 = 3 \times 7 + 0$$

le pgcd étant le dernier reste non nul, on en déduit que $\text{pgcd}(161, 133) = 7$.

Il y aura donc 7 crayons dans chaque paquet.

2. Dans un paquet il y a 14 crayons de chaque couleur pour un total de 294 crayons.

donc il y a un total de 21 paquets ($294 : 14 = 21$).

Exercice 34 :

Pour A:

Calculons le pgcd (945,595)

$$945 = 1 \times 595 + 350$$

$$595 = 1 \times 350 + 245$$

$$350 = 1 \times 245 + 105$$

$$245 = 2 \times 105 + 35$$

$$105 = 2 \times 35 + 35$$

$$35 = 1 \times 35 + 0$$

donc $\text{pgcd}(945, 595) = 35$

ainsi

$$A = \frac{945}{595} = \frac{945 : 35}{595 : 35} = \frac{27}{17}$$

Pour B:

Calculons le pgcd (1 771,736)

$$1\,771 = 2 \times 736 + 299$$

$$736 = 2 \times 299 + 138$$

$$299 = 2 \times 138 + 23$$

$$138 = 6 \times 23 + 0$$

donc $\text{pgcd}(1\,771, 736) = 23$

ainsi

$$B = \frac{736}{1771} = \frac{736:23}{1771:23} = \frac{32}{77}$$

Exercice 35 :

$$F = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{3 - \frac{2}{5}} \div \frac{\frac{4}{5} + \frac{3}{2}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{2}} = \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{6}}{\frac{15}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{13}{5}}$$

$$F = \frac{7}{6} \times \frac{5}{13} = \frac{35}{78}$$

Exercice 36 :

1. On utilise l'algorithme d'Euclide

Et on regroupe les résultats dans un tableau.

Dividende	Diviseur	Reste
135	108	27
108	27	0

Or, dans l'algorithme d'Euclide le PGCD est le dernier reste non nul.

$$\text{PGCD}(135 ; 108) = 27$$

2. a. Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ?

Il pourra réaliser au maximum 27 paquets .

b. Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

$108:27=4$ billes rouges.

$135:27=5$ billes noires .

Conclusion :

Il y aura , dans chaque paquet, 4 billes rouges et 5 billes noires.



Exercice 37 :

Le nombre de Cd n'est pas divisible par 2 et 5 donc le nombre de CD ne se termine pas par 0,2,4,5,6,8.

Donc il se termine par 1,3,7,9

Le nombre recherché est 421 par éliminations successives .

Exercice 38 :

a) A la question : « **Combien 48 a-t-il de diviseurs ?** », Jean répond qu'il y en a 9, alors que Cédric, lui, en trouve 10.

Qui a raison ?

Quelle méthode permet de trouver tous les diviseurs d'un nombre ?

Les diviseurs de 48 sont 1;2;3;4;6;8;12;16;24;48 .

Il y en a 10, Cédric a raison .

b) Un artiste dispose d'une toile de 60 cm sur 48 cm.

Il veut y peindre un pavage composé de carrés identiques, mais de couleurs différentes. La longueur du côté de ces carrés est un nombre entier.

Quelle est la plus grande longueur possible pour ces carrés (en cm) ?

La plus grande longueur correspond au pgcd (60,48)

PGCD(60 ; 48)

On utilise l'algorithme d'Euclide
Et on regroupe les résultats dans un tableau.

Dividende	Diviseur	Reste
60	48	12
48	12	0

Or, dans l'algorithme d'Euclide le PGCD est le dernier reste non nul.
 $\text{PGCD}(60 ; 48) = 12$

Conclusion : La plus grande longueur est de 12 cm .



Exercice 39 :

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

- a) 3 est un diviseur de 43. **FAUX**
- b) 132 est divisible par 11. **VRAI**
- c) 7 a pour diviseur 21. **FAUX**
- g) 24 a pour multiple 240. **VRAI**
- h) 5 divise 450. **VRAI**
- i) 8 est un diviseur de 0. **VRAI**

- d) 222 est un diviseur de 31 024. **FAUX** j) 1 est un multiple de 67. **FAUX**
 e) 31 024 est un multiple de 113. **FAUX** k) 1 divise 0. **VRAI**
 f) 45 a pour diviseur 5. **VRAI** l) 0 divise 15. **FAUX**

Exercice 40 :

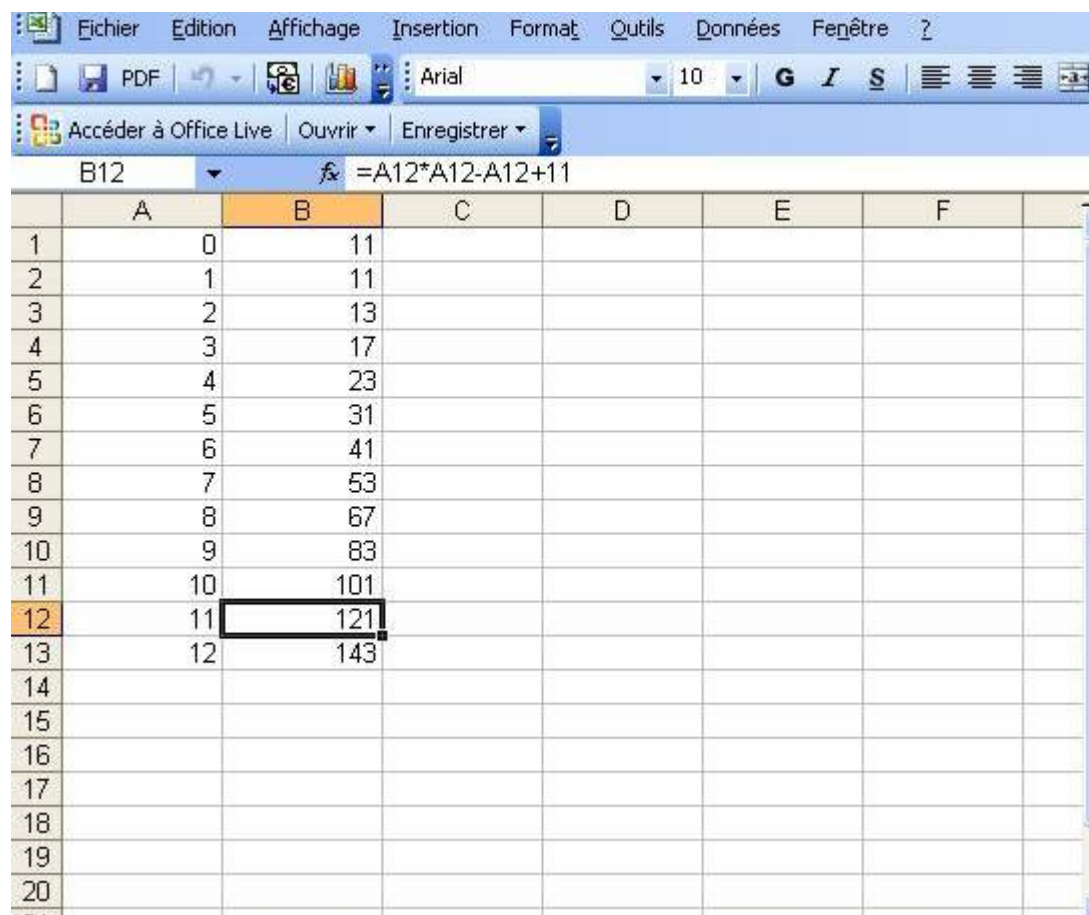
Si le nombre possède que deux diviseurs alors c'est un nombre premier.

Il suffit de créer un tableau avec le logiciel excel.

On observe que $n=11$, on obtient 121 .

Or 121 est divisible par 121 , 11 et 1 donc possède 3 diviseurs.

L'affirmation est fausse.



	A	B	C	D	E	F
1	0	11				
2	1	11				
3	2	13				
4	3	17				
5	4	23				
6	5	31				
7	6	41				
8	7	53				
9	8	67				
10	9	83				
11	10	101				
12	11	121				
13	12	143				
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						

Exercice 41 :

1. Calculer le nombre de tartelettes .

Calculons le pgcd(411,685)

$$685 = 1 \times 411 + 274$$

$$411 = 1 \times 274 + 137$$

$$274 = 2 \times 137 + 0$$

donc **pgcd(411,685)=137**

2. Calculer le nombre de framboises et de fraises dans chaque tartelette .

$$411 : 137 = 3$$

Il y aura donc 3 framboises par tartelette .

$$685 : 137 = 5$$

Il y aura 5 fraises par tartelette .



Exercice 42 :

1. Combien de bouquets le fleuriste pourra-t-il constituer ?

Montrez que le pgcd (1105,935) = 85

2. Quelle sera la constitution de chaque bouquet ?

$$1105 : 85 = 13 \quad \text{et} \quad 935 : 85 = 11$$

Chaque bouquet est constitué de 13 oeillets et 11 iris .



Exercice 43:

1) Les nombres 3120 et 2760 sont premiers entre eux ? Justifier

Ces deux nombres sont divisibles par 10 donc ils ne sont pas premiers entre eux car leur pgcd est différent de 1.

2) Calculer le plus grand diviseur commun de 3120 et 2760.

$$3120 = 1 \times 2760 + 360$$

$$2760 = 7 \times 360 + 240$$

$$360 = 1 \times 240 + 120$$

$$240 = 2 \times 120 + 0$$

Le pgcd étant le dernier reste non nul, **pgcd(3120, 2760) = 120**

3) Rendre irréductible la fraction $\frac{3120}{2760}$.

$$\frac{3120}{2760} = \frac{3120:120}{2760:120} = \frac{26}{23}$$

4) Un confiseur dispose de 3120 dragées roses et de 2760 dragées blancs, il souhaite faire des paquets tous identiques de dragées roses et blancs.

Afin de faire un bénéfice maximum sur ces ventes, le nombre de paquets doit être le plus grand possible et il doit utiliser tous ses dragées.

a) Quel est le nombre de paquet que le confiseur confectionne ?

Chaque paquet doit contenir le maximum de dragées de chaque couleur

donc cela revient à chercher le pgcd(3120,2760) soit 120 paquets.

b) Quel est le nombre dans chaque paquet de dragées roses ?

$$3120 : 120 = 26.$$

Chaque paquet contient 26 dragées roses.

c) Quel est le nombre dans chaque paquets de dragées blancs ?

Chaque paquet contient 26 dragées blancs.