

Arithmétique

Exercice 1 :

1-Posons $d = \text{pgcd}(a,b)$

On a si d divise a et d divise b alors d divise b et d divise $(a-bq)$

Réciproquement : si d divise b et d divise $(a-bq)$ alors d divise $(a - bq) + bq = a$

2- c'est la relation précédente avec $a = 5n^3 - n; b = n + 2; q = 5n^2 - 10n + 19$.

Exercice 2 :

Pour démontrer que $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3, on peut utiliser le principe de récurrence.

1. Vérification initiale :

Pour $n = 1$, on a $1(1+2)(1+4) = 1(3)(5) = 15$, qui est divisible par 3.

2. Hypothèse de récurrence :

Supposons que pour un certain entier naturel k , $k(k+2)(k+4)$ est divisible par 3.

3. Étape de récurrence :

Nous devons démontrer que $(k+1)((k+1)+2)((k+1)+4)$ est aussi divisible par 3.

Développons cette expression littérale :

$$\begin{aligned}(k+1)(k+3)(k+5) &= (k^2+4k+3)(k+5) \\ &= k^3+5k^2+4k^2+20k+3k+15 \\ &= k^3+9k^2+23k+15\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que k^3+9k^2+23k est divisible par 3 car chaque terme est divisible par 3.

De plus, 15 est également divisible par 3.

Donc, $(k+1)(k+3)(k+5)$ est divisible par 3.

4. Conclusion :

En utilisant le principe de récurrence, nous avons montré que pour tout entier naturel n , $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.

Exercice 3 :

Soit $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$ et $\mu = \text{PPCM}(a ; b)$.

On a alors $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ avec a' et b' premiers entre eux.

On a donc $\text{PPCM}(a' ; b') = a'b'$

$$\mu = \text{PPCM}(\delta a' ; \delta b') = \delta \times \text{PPCM}(a' ; b') = \delta \times a' \times b'$$

$$\text{Ainsi } \delta \mu = \delta^2 \times a' \times b' = \delta \times a' \times \delta \times b' = ab$$

Système d'équations et arithmétique.

De la relation $\text{PPCM}(a;b) \times \text{PGCD}(a;b) = ab$,

on déduit à partir de la deuxième équation du système :

$$3 \times \text{PPCM}(a ; b) = \text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b)$$

$$\text{Donc } \mathbf{\text{PGCD}(a;b) = 3}$$

Il existe alors des entiers a' et b' (premiers entre eux) tels que $a = 3a'$ et $b = 3b'$.

En reportant dans la première équation, on obtient :

$$9a'^2 - 9b'^2 = 405$$

$$\text{Soit } (a' + b')(a' - b') = 45$$

$$\text{Or } 45 = 3^2 \times 5$$

On peut donc avoir les 3 systèmes suivants :

$$\begin{cases} a' + b' = 45 \\ a' - b' = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} a' + b' = 15 \\ a' - b' = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} a' + b' = 9 \\ a' - b' = 5. \end{cases}$$

$$a' = 23 \text{ et } b' = 22 \quad a' = 9 \text{ et } b' = 6 \quad a' = 7 \text{ et } b' = 2$$

D'où $(a ; b) = (66 ; 69)$ ne convient pas car d'où $(a ; b) = (42 ; 6)$

9 et 6 ne sont pas premiers entre eux

Les couples solutions du système sont donc $(42 ; 6)$ et $(66 ; 69)$.

Exercice 4 :

Pour résoudre le système d'équations donné, nous allons utiliser une approche par factorisation.

$$\text{Équation 1: } a^2 - b^2 = 405$$

Cette équation est une différence de carrés, donc nous pouvons factoriser le côté gauche en utilisant

$$\text{l'identité } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b):$$

$$(a+b)(a-b) = 405$$

$$\text{Équation 2: } 3 \times \text{ppcm}(a,b) = ab$$

La ppcm (plus petit commun multiple) de deux entiers a et b est le plus petit multiple commun à ces deux nombres.

Maintenant, nous allons résoudre le système d'équations en utilisant la factorisation de l'équation 1.

$$(a + b)(a - b) = 405$$

Pour simplifier les choses, nous allons noter $(a + b)$ comme x et $(a - b)$ comme y :

$$xy = 405$$

Ensuite, nous pouvons exprimer la deuxième équation en termes de x et y :

$$3 \times \frac{(x+y)}{2} \times \frac{(x-y)}{2} = \frac{(x+y)}{2} \times \frac{(x-y)}{2}$$

Simplifions cette équation en mettant tout sur un seul côté:

$$\frac{(x+y)}{2} \times \frac{(x-y)}{2} - 3 \times \frac{(x+y)}{2} \times \frac{(x-y)}{2} = 0$$

Donc, nous avons maintenant le système d'équations suivant:

$$xy = 405$$

$$\frac{(x+y)}{2} \times \frac{(x-y)}{2} - 3 \times \frac{(x+y)}{2} \times \frac{(x-y)}{2} = 0$$

En résolvant ce système d'équations, nous obtiendrons les valeurs possibles pour x ($a + b$) et y ($a - b$).

Comme $405 = 3 * 3 * 3 * 5 * 9$, nous pouvons essayer différentes combinaisons de diviseurs de 405 qui multiplient pour donner 405. Les paires possibles de diviseurs comprennent: (1, 405), (3, 135), (5, 81), (9, 45).

Nous pouvons utiliser ces paires pour résoudre les équations.

1. Lorsque $x = 405$ et $y = 1$:

$$(a + b) = 405 \text{ et } (a - b) = 1$$

En résolvant ce système, nous obtenons $a = 203$ et $b = 202$.

2. Lorsque $x = 135$ et $y = 3$:

$$(a + b) = 135 \text{ et } (a - b) = 3$$

En résolvant ce système, nous obtenons $a = 69$ et $b = 66$.

3. Lorsque $x = 81$ et $y = 5$:

$$(a + b) = 81 \text{ et } (a - b) = 5$$

En résolvant ce système, nous obtenons $a = 43$ et $b = 38$.

4. Lorsque $x = 45$ et $y = 9$:

$$(a + b) = 45 \text{ et } (a - b) = 9$$

En résolvant ce système, nous obtenons $a = 27$ et $b = 18$.

Donc, les solutions dans $\mathbb{N}$ pour le système d'équations sont :

$$(a, b) = (203, 202), (69, 66), (43, 38), (27, 18).$$

Exercice 5 :

$$1) (a^2 + 2b^2)^2 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4$$

$$2) \quad a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

$$a^4 + 4b^4 = [(a+b)^2 + b^2][(a-b)^2 + b^2]$$

$$(a+b)^2 + b^2 \geq 4 \text{ et } (a-b)^2 + b^2 \geq 4. \text{ car } a \text{ et } b \text{ sont supérieurs ou égaux à } 2.$$

$a^4 + 4b^4$ est le produit de deux entiers supérieurs strictement à 1.

Donc $a^4 + 4b^4$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 7 :

1. Démonstration de $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$:

Nous pouvons utiliser l'identité factorielle pour les cubes parfaits, qui dit que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Posons $a = x$ et $b = y$.

Alors:

$$(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Donc, l'identité $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ est démontrée.

2. Résolution de l'équation $x^3 - y^3 = 127$ où les inconnues sont des entiers naturels :

Nous voulons trouver des entiers naturels x et y qui satisfont l'équation $x^3 - y^3 = 127$.

En utilisant l'identité factorielle démontrée précédemment, nous pouvons réécrire l'équation comme suit :

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 127.$$

Puisque 127 est un nombre premier, cela signifie que les seules façons d'exprimer 127 comme produit de deux facteurs est $1 * 127$ ou $-1 * -127$.

Nous devons alors trouver des valeurs possibles pour $x - y$ et $x^2 + xy + y^2$ qui donnent 127 lorsque multipliées.

En testant différentes valeurs possibles pour $x - y$, nous pouvons trouver des paires (x, y) qui satisfont l'équation. Voici quelques-unes des paires possibles qui donnent 127 :

$$(x - y, x^2 + xy + y^2) = (1, 127)$$

Dans ce cas, nous pouvons résoudre les équations :

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x^2 + xy + y^2 &= 127 \end{aligned}$$

En résolvant ces équations, nous obtenons les solutions suivantes :

$$(x, y) = (6, 5) \text{ et } (x, y) = (-20, -21)$$

$$(x-y, x^2+xy+y^2) = (-1, -127)$$

Dans ce cas, nous pouvons résoudre les équations :

$$\begin{aligned} x-y &= -1 \\ x^2+xy+y^2 &= -127 \end{aligned}$$

Cependant, nous recherchons des solutions dans les entiers naturels, donc ces paires ne sont pas valables.

Donc, les solutions entières naturelles de l'équation $x^3-y^3=127$ sont :

$$(x,y) = (6,5) \text{ et } (x,y) = (-20,-21).$$

Exercice 8 :

Pour démontrer que le couple (q, r) est unique, nous allons utiliser la méthode de contradiction.

Supposons qu'il existe deux couples (q_1, r_1) et (q_2, r_2) qui satisfont les conditions du théorème de la division euclidienne pour a et b .

Cela signifie que nous avons :

$$a = bq_1 + r_1 \text{ et } 0 \leq r_1 \leq |b|,$$

$$a = bq_2 + r_2 \text{ et } 0 \leq r_2 \leq |b|.$$

Nous allons montrer que $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$.

1. Montrons que $q_1 = q_2$:

En soustrayant l'équation $(a = bq_1 + r_1)$ de l'équation $(a = bq_2 + r_2)$, nous obtenons :

$$0 = b(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1).$$

Puisque $0 \leq r_1, r_2 \leq |b|$, cela signifie que $|r_2 - r_1| \leq |b|$.

De plus, puisque $b(q_2 - q_1)$ est un multiple de b , $|b(q_2 - q_1)|$ est également inférieur ou égal à $|b|$.

$$\text{Donc, nous avons } |b(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1)| \leq |b| + |b| = 2|b|.$$

Cela signifie que la différence $(q_2 - q_1)$ est un entier dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 2.

Mais comme q_1 et q_2 sont tous les deux des entiers, il n'y a que trois possibilités pour leur différence $(q_2 - q_1)$: -2, 0, ou 2.

Cela implique que $q_2 - q_1 = 0$, ce qui signifie que $q_1 = q_2$.

2. Montrons que $r_1 = r_2$:

En utilisant l'égalité $q_1 = q_2$, nous pouvons réécrire l'équation $(a = bq_1 + r_1)$ comme suit :

$$a = bq_2 + r_1.$$

En soustrayant l'équation $(a = bq_2 + r_2)$ de cette nouvelle équation, nous obtenons :

$$0 = (r_1 - r_2).$$

Puisque r_1 et r_2 sont tous les deux des nombres naturels, cela signifie que $r_1 - r_2 = 0$ et donc $r_1 = r_2$.

Ainsi, nous avons montré que si deux couples (q_1, r_1) et (q_2, r_2) satisfont les conditions du théorème de la division euclidienne pour a et b , alors $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$.

Cela implique que le couple (q, r) est unique.

Exercice 9 :

1. Pour exprimer p^2 en fonction de n et q , nous élevons au carré les deux côtés de l'équation $\sqrt{n} = p/q$:

$$(\sqrt{n})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

Cela donne $n = \frac{p^2}{q^2}$.

En multipliant les deux côtés de cette équation par q^2 , nous obtenons :

$$n \times q^2 = p^2.$$

Donc, $p^2 = n \times q^2$.

2. En utilisant la décomposition en facteurs premiers, nous pouvons écrire n , p et q de la manière suivante :

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}$$

$$p = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \dots \times p_k^{b_k}$$

$$q = p_1^{c_1} \times p_2^{c_2} \times \dots \times p_k^{c_k}$$

où les p_i sont des nombres premiers distincts et les a_i , b_i , c_i sont des entiers positifs.

En substituant ces expressions dans l'équation $p^2 = n \times q^2$, nous obtenons :

$$(p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times \dots \times p_k^{b_k})^2 = (p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}) \times (p_1^{c_1} \times p_2^{c_2} \times \dots \times p_k^{c_k})^2$$

En simplifiant cette équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & p_1^{(2b_1)} \times p_2^{(2b_2)} \times \dots \times p_k^{(2b_k)} \\ &= p_1^{(a_1+2c_1)} \times p_2^{(a_2+2c_2)} \times \dots \times p_k^{(a_k+2c_k)} \end{aligned}$$

Cela signifie que pour chaque p_i , les exposants des facteurs premiers correspondants doivent être égaux.

Maintenant, supposons qu'il existe un p_i , par exemple p_1 , dont l'exposant de p dans p^2 est différent de l'exposant correspondant de p_i dans $n \times q^2$.

Ce serait une contradiction avec le fait que tout entier naturel admet une décomposition unique en produit de facteurs premiers.

Par conséquent, les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de n sont les mêmes que les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de p^2 .

3. En conclusion, si $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel, alors nous pouvons l'exprimer sous la forme p/q , où p et q sont des entiers avec $\text{pgcd}(p,q)=1$.

En utilisant cette expression, nous avons montré que $p^2 = n \times q^2$ et que les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de n sont les mêmes que les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de p^2 .

Cela signifie que si n est le carré d'aucun entier, alors les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de n doivent tous être pairs.

4. Pour démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel, nous allons utiliser la méthode de l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il peut être exprimé sous la forme p/q où p et q sont des entiers avec $\text{pgcd}(p,q)=1$.

En élevant au carré les deux côtés de l'équation, nous obtenons :

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

Cela donne $2 + 2\sqrt{6} + 3 = p^2/q^2$

En simplifiant cette équation, nous obtenons :

$$5 + 2\sqrt{6} = p^2/q^2$$

Cela impliquerait que $\sqrt{6}$ est un nombre rationnel, ce qui est une contradiction avec le fait que $\sqrt{6}$ ne peut pas être exprimé sous la forme p/q où p et q sont des entiers avec $\text{pgcd}(p,q)=1$.

Par conséquent, nous avons montré que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 11 :

Nous allons démontrer cette égalité par récurrence.

Pour $n = 1$, l'équation devient :

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^k k = (-1)^1 (1) = -1$$

De plus, $\frac{(-1)^1(2(1)+1)-1}{4} = \frac{-1}{4}$, ce qui est égal à -1.

Donc la formule est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons maintenant que la formule soit vraie pour un certain entier k , c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^k (-1)^k k = \frac{(-1)^k(2k+1)-1}{4}$$

Nous allons montrer que la formule est également vraie pour $n = k+1$.

Considérons l'expression $\sum_{k=1}^{k+1} (-1)^k k$. On peut la réécrire comme :

$$\sum_{k=1}^k (-1)^k k + (-1)^{k+1}(k+1)$$

D'après notre hypothèse de récurrence, nous savons que $\sum_{k=1}^k (-1)^k k = \frac{(-1)^k(2k+1)-1}{4}$, nous pouvons donc réécrire l'expression :

$$\frac{(-1)^k(2k+1)-1}{4} + (-1)^{k+1}(k+1)$$

Simplifions cette expression :

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^k(2k+1)-1 + (-1)^{k+1}(k+1) \cdot 4}{4} \\ &= \frac{(-1)^k(2k+1)-1 + (-1)^k(-1)(k+1)}{4} \\ &= \frac{(-1)^k(2k+1)-1 - (-1)^k(k+1)}{4} \\ &= \frac{(-1)^k(2k+1) - (-1)^k(k+1) - 1}{4} \\ &= \frac{(-1)^k(2k+1-k-1)-1}{4} \\ &= \frac{(-1)^k(k+1)-1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)-1}{4} \end{aligned}$$

On a donc montré que si la formule est vraie pour $n = k$, alors elle est également vraie pour $n = k+1$.

Ainsi, la formule est vérifiée pour tous les entiers $n \geq 1$, par récurrence.

Exercice 12 :

Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence.

Pour $n = 0$, l'inégalité devient $(1+x)^0 \geq 1+0x = 1$.

L'inégalité est vraie pour $n = 0$ car $(1+x)^0 = 1$ est égal à 1.

Supposons maintenant que l'inégalité soit vraie pour un certain entier k , c'est-à-dire :

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

Nous allons montrer que l'inégalité est également vraie pour $n = k+1$.

Considérons l'expression $(1+x)^{k+1}$. On peut la réécrire en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \times (1+x)$$

D'après notre hypothèse de récurrence, nous savons que $(1+x)^k \geq 1+kx$. Nous pouvons donc réécrire l'expression :

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx) \times (1+x)$$

Simplifions cette expression :

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &\geq 1+x+kx+kx^2 \\ (1+x)^{k+1} &\geq 1+(k+1)x+kx^2 \end{aligned}$$

Puisque x est un réel positif, kx^2 est également positif. On peut donc écrire :

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

On a donc montré que si l'inégalité est vraie pour $n = k$, alors elle est également vraie pour $n = k+1$.

Ainsi, l'inégalité est vérifiée pour tous les entiers $n \geq 0$, par récurrence.

Exercice 13 :

1. La contraposée de la proposition précédente est :

Si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

2. Pour prouver la contraposée, nous supposons que n est impair, c'est-à-dire $n = 2k + 1$ pour un certain entier k .

Nous devons maintenant montrer que n^2-1 est divisible par 8. Nous remplaçons n dans l'expression n^2-1 pour obtenir :

$$(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k.$$

Nous voyons que $4k^2$ est un multiple de 8, car k^2 est un entier. De plus, $4k$ est également un multiple de 8, car $4k = 2(2k)$, où $2k$ est un entier.

Ainsi, nous pouvons écrire $n^2-1=4k^2+4k$ comme $8m$, où m est l'entier (k^2+k) .

Cela montre que si n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8.

3. À partir de cette démonstration par contraposée, nous pouvons en déduire que si n^2-1 n'est pas divisible par 8, alors n n'est pas impair.

Autrement dit, si n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8.

Cela signifie que si l'entier n^2-1 n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Exercice 14 :

Nous allons démontrer cette affirmation par récurrence.

Pour $n = 0$, nous avons $\boxed{\times}$.

Comme 0 est un multiple de 3, l'affirmation est vraie pour $n = 0$.

Supposons maintenant que l'affirmation soit vraie pour un certain entier k , c'est-à-dire que $\boxed{\times}$ est un multiple de 3.

Nous allons montrer que l'affirmation est également vraie pour $n = k+1$.

Considérons l'expression $(k+1)^3-(k+1)$. En développant cette expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (k+1)^3-(k+1) \\ &= k^3+3k^2+3k+1-(k+1) \\ &= k^3+3k^2+3k-k \\ &= k^3+3k^2+2k \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $\boxed{\times}$ est un multiple de 3.

Nous pouvons donc écrire :

$$k^3-k=3m, \text{ où } m \text{ est un entier.}$$

En remplaçant cette expression dans $(k+1)^3 - (k+1)$, nous avons :

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (3m+k) + 3k^2 + 2k \\ &= 3m + 3k^2 + 3k \\ &= 3(m+k^2+k)\end{aligned}$$

Nous voyons que $(k+1)^3 - (k+1)$ est un multiple de 3, car il peut être écrit sous la forme $3(n)$, où n est l'entier $(m+k^2+k)$.

Ainsi, nous avons montré que si l'affirmation est vraie pour $n = k$, alors elle est également vraie pour $n = k+1$.

Par conséquent, l'affirmation est vérifiée pour tous les entiers $n \geq 0$, par récurrence.

Exercice 15 :

1. Pour développer l'expression $(n+1)^5$, nous utilisons la formule du binôme de Newton :

$$(n+1)^5 = C(5,0) \times n^5 + C(5,1) \times n^4 \times (1^1) + C(5,2) \times n^3 \times (1^2) + C(5,3) \times n^2 \times (1^3) + C(5,4) \times n^1 \times (1^4) + C(5,5) \times (1^5)$$

Les coefficients binomiaux $C(5,k)$ sont donnés par les coefficients du développement du binôme :

$$\begin{aligned}C(5,0) &= 1 \\ C(5,1) &= 5 \\ C(5,2) &= 10 \\ C(5,3) &= 10 \\ C(5,4) &= 5 \\ C(5,5) &= 1\end{aligned}$$

En substituant ces coefficients, nous obtenons :

$$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

2. Maintenant, pour démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $n^5 - n$ est un multiple de 5, nous devons factoriser l'expression $n^5 - n$:

$$n^5 - n = (n-1)n(n^2+n+1)$$

Il suffit maintenant de montrer que l'un des facteurs $(n-1)$, n ou (n^2+n+1) est divisible par 5.

Pour $n = 0$, nous avons $n = 0$ et $n^5 - n = 0$ qui est divisible par 5.

Supposons maintenant que pour un certain entier $k \geq 0$, $k^5 - k$ est divisible par 5.

Considérons le cas de $n = k+1$:

$$\begin{aligned} & (n+1)^5 - (n+1) \\ &= (k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 \\ &= k^5 - k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \\ &= (k^5 - k) + 5(k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1)) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que $k^5 - k$ est divisible par 5.

De plus, le second terme $5(k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1))$ est également divisible par 5, car k est un entier.

Ainsi, nous avons montré que $(n+1)^5 - (n+1)$ est divisible par 5, ce qui implique que $n^5 - n$ est également divisible par 5 pour tout entier $n \geq 0$.

Par conséquent, $n^5 - n$ est un multiple de 5 pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 16 :

1. Pour montrer que $S = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, nous pouvons utiliser la méthode de la somme télescopique.

Considérons la différence $S - S'$ où S' est la somme suivante :

$$S' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3$$

Nous pouvons développer $(k+1)^3$ comme suit :

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Remarquons que chaque terme de cette expression est présent dans la somme S . Cependant, le dernier terme (1) n'est pas présent dans S . Pour compenser cela, nous pouvons soustraire la somme S' de S et obtenir :

$$S - S' = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3) = n^3$$

Ainsi, nous avons $S - S' = n^3$.

Maintenant, réorganisons cette équation pour trouver S en fonction de S' :

$$S = S' + n^3$$

La somme S' peut être simplifiée en utilisant la formule de la somme des premiers carrés :

$$S' = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

La formule pour la somme des premiers carrés est donnée par :

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$S' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En remplaçant cette expression dans la formule pour S , nous obtenons :

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^3$$

Simplifions cette expression :

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6n^3}{6}$$

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^3}{6}$$

$$S = \frac{8n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$S = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Nous avons donc démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Pour trouver la valeur de $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$, nous pouvons utiliser la formule que nous avons démontrée dans la question précédente :

$$A = \sum_{k=1}^{10} k^3 = \frac{10^2(10+1)^2}{4}$$

$$A = \frac{10^2 \cdot 11^2}{4}$$

$$A = \frac{100 \cdot 121}{4}$$

$$A = \frac{12100}{4}$$

$$A = 3025$$

Donc, $A = 3025$.

Exercice 17 :

Pour montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3, nous pouvons utiliser une démonstration par récurrence.

1. Vérification de la propriété pour $n = 0$:

Pour $n = 0$, on a $0^3 - 0 = 0$, qui est un multiple de 3.

2. Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $\boxed{\times}$ est un multiple de 3.

3. Montrons que la propriété est également vraie pour $k+1$:

$$\begin{aligned} & (k+1)^3 - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= k^3 - k + 3k^2 + 3k \\ &= (k^3 - k) + 3k(k+1) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $\boxed{\times}$ est un multiple de 3.

De plus, $3k(k+1)$ est également un multiple de 3, car k et $k+1$ sont tous deux des entiers.

Ainsi, nous avons montré que $(k+1)^3 - (k+1)$ est un multiple de 3.

Par conséquent, par le principe de récurrence, nous pouvons conclure que pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.