

Applications linéaires

Exercice 1 : Reconnaître une application linéaire

Dire si chacune des applications suivantes est linéaire. Justifier par une preuve ou par un contre-exemple.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (x + y, 2x - y)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (|x|, y)$.
4. $f_4 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $M \rightarrow \det M$.
5. $f_5 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \rightarrow P' + XP$.
6. $f_6 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \rightarrow g(0) + \int_0^1 g(t) dt$.

7. Parmi les applications linéaires trouvées, lesquelles sont injectives ?

Exercice 2 : Noyau et image dans $\mathbb{R}^3$

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + z, \\ , 2x + y - z, \\ , x + 2y - 2z).$$

1. Déterminer une base de $\ker f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$, puis une équation de ce sous-espace.
3. Vérifier le théorème du rang. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Le vecteur $(1, 1, 0)$ a-t-il des antécédents par f ? Si oui, les déterminer tous.

Exercice 3 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

On note $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application $P \rightarrow P - XP'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$. En déduire $\ker \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ et le rang de φ .
3. A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \ker \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$?
4. L'application φ est-elle un projecteur ? Montrer que $\varphi \circ \varphi$ est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 4 : Un projecteur du plan

Soit $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire $(x, y) \rightarrow (2x - 2y, \\ , x - y)$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Déterminer $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$. Décrire géométriquement p .
3. Calculer $p(1, 0)$ et décomposer $(1, 0)$ sur $\operatorname{Im} p \oplus \ker p$.
4. Déterminer l'expression du projecteur $q = \operatorname{id} - p$ et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 5 : Une symétrie du plan

Soit $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire $(x, y) \mapsto (3x - 4y, 2x - 3y)$.

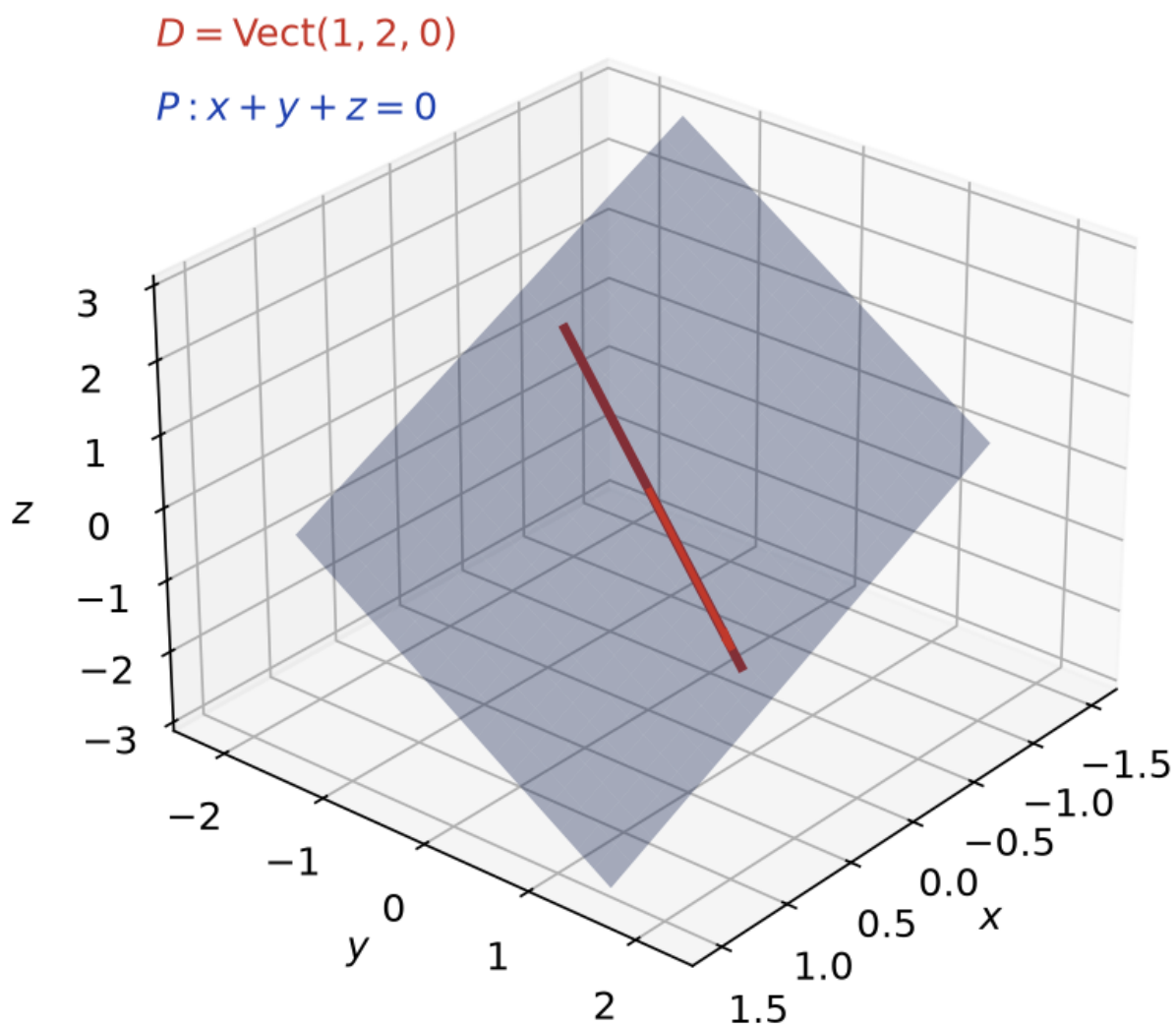
1. Montrer que $s \circ s = \operatorname{id}$. Que peut-on en déduire sur s ?
2. Déterminer $\ker(s - \operatorname{id})$ et $\ker(s + \operatorname{id})$. Décrire géométriquement s .
3. Comparer s avec le projecteur p de l'exercice 4. Calculer $s(1, 0)$.

Exercice 6 : Espaces isomorphes et dimension

1. Donner la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Construire un isomorphisme explicite de $\mathbb{R}_3[X]$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre 2 est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, ni aucune application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}))$.

Exercice 7 : Projection sur un plan parallèlement à une droite

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x + y + z = 0$ et la droite $D = \text{Vect}(w)$, où $w = (1, 2, 0)$. La figure ci-dessous représente ces deux sous-espaces.



1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Déterminer l'expression analytique de la projection p sur P parallèlement à D .
3. En déduire l'expression de la symétrie s par rapport à P parallèlement à D .
4. Vérifier les résultats sur les vecteurs w et $(1, -1, 0)$.

Exercice 8 : Construire une application linéaire par l'image d'une base

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier qu'il existe une unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $u(e_1) = (1, 1, 0)$, $u(e_2) = (0, 1, 1)$ et $u(e_3) = (1, 2, 1)$. Donner $u(x, y, z)$, puis $\ker u$ et $\text{Im } u$.
2. Existe-t-il $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $v(1, 1) = (1, 0)$, $v(1, -1) = (0, 1)$ et $v(2, 0) = (1, 2)$?
3. Construire $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont le noyau est la droite $\text{Vect}((1, 1, 1))$ et dont l'image est le plan d'équation $z = 0$. Donner $w(x, y, z)$.
4. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est égal à l'image ?

Exercice 9 : Image directe et image réciproque

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient A et A' deux sous-espaces de E , et B un sous-espace de F .

1. Montrer que $f(A + A') = f(A) + f(A')$.
2. Montrer que $f^{-1}(f(A)) = A + \ker f$.
3. Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im } f$.
4. Application : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \rightarrow (x + y, y + z)$, et $A = \text{Vect}(e_1)$. Déterminer $\ker f$, $f(A)$ et $f^{-1}(f(A))$. Déterminer aussi $f^{-1}(B)$ pour $B = \text{Vect}((1, 1))$.

Exercice 10 : Noyaux et images sur les matrices carrées

1. Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto M - M^T$. Montrer que φ est linéaire. Déterminer son noyau, puis son image à l'aide du théorème du rang.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\psi : M \mapsto AM$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $\ker \psi$ et $\operatorname{Im} \psi$, avec leurs dimensions.
3. Calculer A^2 . En déduire que $\frac{1}{2}\psi$ est un projecteur, et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 11 : Dérivation et multiplication par X

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les endomorphismes $D : P \mapsto P'$ et $T : P \mapsto XP$.

1. Montrer que D est surjective mais non injective.
2. Montrer que T est injective mais non surjective.
3. Montrer que $D \circ T - T \circ D = \operatorname{id}_E$. L'anneau $\mathcal{L}(E)$ est-il commutatif ?
4. Montrer que $D \circ T$ est un automorphisme de E et calculer son inverse sur chaque X^k .
5. Déterminer le noyau et l'image de $T \circ D$. Pourquoi ces résultats ne contredisent-ils pas le cours sur la dimension finie ?

Exercice 12 : Injectivité et bijectivité sur les polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(X) + P(X+1)$.

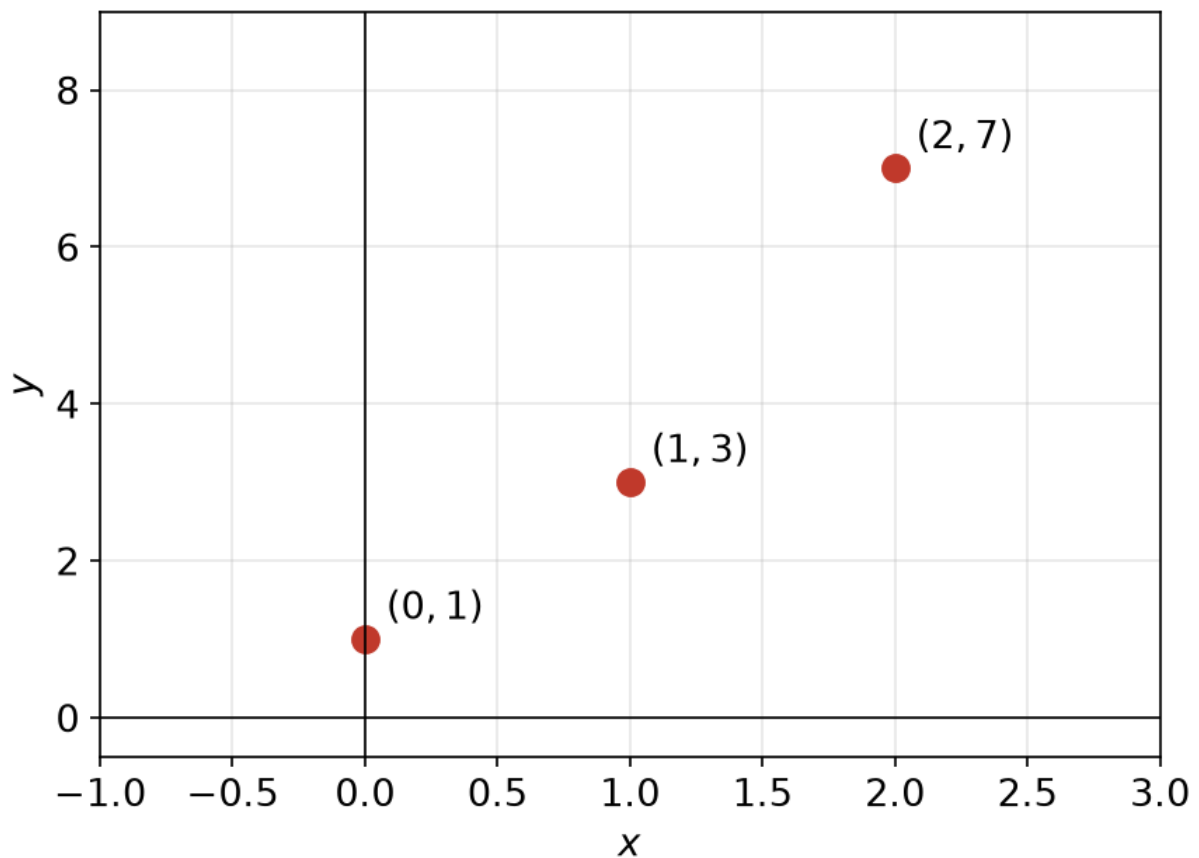
1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que φ est injective, puis qu'elle est bijective.
3. Pour $n = 2$, déterminer l'unique $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(X) + P(X+1) = X^2$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simple de $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$.

Exercice 13 : Interpolation de Lagrange par un isomorphisme

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On pose $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $P \rightarrow (P(a_0), \dots, P(a_n))$.

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que, pour tous réels $b_0, \dots, b_n$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i .
3. Déterminer le polynôme P de degré au plus 2 dont la courbe passe par les trois points de la figure ci-dessous : $(0, 1)$, $(1, 3)$ et $(2, 7)$.
4. Quelle est la dimension de $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a_0) = 0\}$?



Exercice 14 : Supplémentaire du noyau et forme géométrique du rang

Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$.

1. Déterminer $\ker g$ et le rang de g . L'application g est-elle surjective ?
2. Montrer que $S = \text{Vect}(e_1, e_2)$ est un supplémentaire de $\ker g$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que la restriction de g à S est un isomorphisme de S sur $\mathbb{R}^2$, et expliciter son inverse.
4. Même question avec $S' = \text{Vect}(e_1, e_3)$. Que retenir de cet exemple ?

Exercice 15 : Endomorphisme de carré nul

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, non nul, tel que $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\text{Im } f \subset \ker f$.
2. En déduire le rang de f et la dimension de $\ker f$.
3. Vérifier ces résultats sur l'exemple $f(x, y, z) = (z, 0, 0)$.
4. Dans le cas général, soit $u \notin \ker f$. Montrer qu'il existe $v \in \ker f$ tel que $(u, f(u), v)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 : Anneau $\mathcal{L}(E)$ et polynôme annulateur

1. Dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, trouver deux endomorphismes qui ne commutent pas, puis deux endomorphismes non nuls de composée nulle.
2. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0$. Montrer que $f \in \text{GL}(E)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f .
3. Montrer que $f - \text{id}_E$ est un projecteur.
4. Montrer que $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{id}_E)$.
5. Vérifier que $f : (x, y) \rightarrow (x, x + 2y)$ satisfait l'hypothèse, et déterminer les deux sous-espaces de la question 4.

Exercice 17 : Rang d'une composée

Soient E, F, G de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$.
2. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$ si g est injective, et que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$ si f est surjective.
3. En appliquant le théorème du rang à la restriction de g à $\text{Im } f$, montrer que $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg } f + \text{rg } g - \dim F$.
4. En déduire que si $h \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $h \circ h = 0$, avec $\dim E = n$, alors $\text{rg } h \leq \frac{n}{2}$.

Exercice 18 : Noyau et image de f et de f au carré

Soit E de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker f \subset \ker f^2$ et $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
2. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.
3. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
4. En déduire que ces conditions équivalent à $E = \ker f \oplus \text{Im } f$.
5. Illustrer avec l'endomorphisme φ de l'exercice 3, puis avec la dérivation sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 19 : Somme de deux projecteurs

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer que si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p + q$ est un projecteur.
2. Réciproquement, on suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0$.
En composant à gauche puis à droite par p , montrer que $p \circ q = q \circ p$, puis que

$$p \circ q = q \circ p = 0.$$

3. Dans ce cas, montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et que $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 20 : Commutation avec un projecteur

Soit p un projecteur de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\text{Im } p$ et $\ker p$ sont stables par f .
2. On reprend le projecteur $p(x, y) = (2x - 2y, x - y)$ de l'exercice 4. Déterminer tous les $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ qui commutent avec p , en donnant $f(x, y)$.
3. Montrer que l'ensemble de ces endomorphismes est un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de dimension 2, engendré par p et $\text{id} - p$.

Exercice 21 : Applications linéaires nulles sur un sous-espace

Soient E et F de dimensions respectives n et m , et A un sous-espace de E de dimension k . On pose $W = \{f \in \mathcal{L}(E, F) \mid A \subset \ker f\}$, et on fixe un supplémentaire B de A dans E .

1. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. Montrer que $\rho: W \rightarrow \mathcal{L}(B, F), f \mapsto f|_B$ est un isomorphisme.
3. En déduire $\dim W$.
4. Application : quelle est la dimension de l'espace des $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telles que $f(1, 1, 1) = 0$? Donner une base de cet espace.

Exercice 22 : Problème : l'opérateur de différence et la somme des carrés

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\Delta : E \rightarrow E, P \rightarrow P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E . Calculer $\Delta(1)$, $\Delta(X)$, $\Delta(X^2)$ et $\Delta(X^3)$.
2. Montrer que si $\deg P = d \geq 1$, alors $\deg \Delta(P) = d - 1$.
3. Montrer que $\ker \Delta = \mathbb{R}_0[X]$, l'espace des polynômes constants.
4. En utilisant le théorème du rang, montrer que $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_2[X]$.
5. En déduire qu'il existe un unique $P \in E$ tel que $\Delta(P) = X^2$ et $P(0) = 0$. Le calculer et le factoriser.
6. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7. Calculer $\Delta^2(X^3)$, $\Delta^3(X^3)$, puis montrer que $\Delta^4 = 0$ et $\Delta^3 \neq 0$. Déterminer le rang de Δ^2 .

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [applications linéaires, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels de dimension finie](#)
- Chapitre précédent : [Espaces vectoriels de dimension finie](#)
- Chapitre suivant : [Formes linéaires, hyperplans et sous-espaces affines](#)
- Le même thème en L1 : [applications linéaires, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)